<u>פיתרון לתרגיל מספר 3</u>

**תשובה 1:**

א. נפתח לפי העמודה הראשונה כשהשנשתמש בפעולות השורה הבאות( מימין לשמאל) עמ"נ לאפס את כל הרכיבים בעמודה הראשונה למעט הרכיב $a_{31}$ :

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_3 \qquad R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3 \qquad R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3$$

נשים לב שפעולות אלו אינן משפיעות על הדטרמיננטה. לכן נקבל

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ 9 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= (-8) + 24 + 6 \cdot (6+18) = 160$$

ב.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -47 & -21 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 26 = \frac{13}{12}$$

במעבר הראשון: $R_3 \leftarrow 6 \cdot R_3 \quad , \quad R_1 \leftarrow 4 \cdot R_1$

במעבר השני : $R_3 \leftarrow R_3 - 6 \cdot R_1$

במעבר השלישי: $R_3 \leftarrow R_3 + 47 \cdot R_2$

ג. ניתן לראות שהשורה השניה והשלישית תלויות לינארית מעל $\mathbb{Z}_7$

לכן $R_2 + R_3 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & 21 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 0 & 16 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

**תשובה 2:**

הפעולות האלמנטריות הבאות אינן משפיעות על הדטרמיננטה

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \quad , \quad R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

כשהמעבר האחרון הוא פיתוח לפי העמודה הראשונה.

**תשובה 3:**

$v_3 \in Span\{v_1, v_2\}$ לכן קיימים $a,b \in R$ כך ש $v_3 = av_1 + bv_2$

הפעולות האלמנטריות הבאות אינן משפיעות על הדטרמיננטה

$R_3 \leftarrow R_3 - aR_1 \quad , \quad R_3 \leftarrow R_3 - bR_2$ ומקבלים

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1-a-b & x_3 - ax_1 - bx_2 & y_3 - ay_1 - by_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1-a-b & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1-a-b)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ לכן ניתן לחלק בשני אגפי המשוואה.

**תשובה 4:**

**1**. תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $|A+I| = |A| + 1$ או"א

$ad - bc + 1 = |A| + 1 = |A+I| = ad + a + d - bc + 1$. או"א

$ad - bc + 1 = a + d + (ad - bc + 1)$ או"א $tr(A) = a + d = 0$.

**2**. <u>כיוון ראשון</u>: אם $|A| = 0$ אזי

$$|A + A^2| = |A(I+A)| = |A||I+A| = 0|I+A| = 0 = 0 + 0^2 = |A| + |A|^2$$

אם $tr(A) = 0$ אזי $|A + A^2| = |A||A+I| \underset{(1)}{=} |A|(|A|+1) = |A| + |A|^2$.

כיוון שני: נניח $|A+A^2|=|A|+|A|^2$ . אזי $|A|(|A|+1)=|A|+|A|^2=|A+A^2|=|A||A+I|$ נעביר אגף ונקבל $|A|(|A+I|-|A|-1)=0$ , לכן או ש $|A|=0$ או ש $|A+I|-|A|-1=0$ ז"א $|A+I|=|A|+1$ , ולפי סעיף (1) זה שקול ל $tr(A)=0$.

**תשובה 5:**

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הנ"ל

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$x_1 \ldots x_n \in F$

(זו הצורה המשוחלפת של המטריצה בשאלה. מבחינת הפיתרון אין הבדל).

לכל $i=n,n-1,\ldots 2,1.$ ( לפי סדר יורד) מבצעם את הפעולה האלמנטרית

$c_i \leftarrow c_i - x_1 c_{i-1}$

את הדטרמיננטה המתקבלת מפתחים לפי השורה הראשונה (המכילה רק איבר אחד שונה

מאפס (1) ) מוציאים מכל שורה k במטריצה המתקבלת את $(x_k-x_1)$ מחוץ לדטרמיננטה

ומקבלים מטריצה מאותה צורה בלי $x_1$ ומשיכים אינדוקטיבית: מניחים שלכל $k<n$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_k^1 & x_k^2 & & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le k} (x_i - x_j)$$

זה מתקיים טריוויאלית עבור $n=1,2$ .    עתה,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_1 & x_1^2 - x_1 x_1 & \cdots & x_1^{n-1} - x_1 x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2\left(x_2 - x_1\right) & \cdots & x_2^{n-2}\left(x_2 - x_1\right) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n\left(x_n - x_1\right) & & x_n^{n-2}\left(x_n - x_1\right) \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2\left(x_2 - x_1\right) & \cdots & x_2^{n-2}\left(x_2 - x_1\right) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n\left(x_n - x_1\right) & & x_n^{n-2}\left(x_n - x_1\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(x_2 - x_1\right) \cdots \left(x_n - x_1\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^{n-2} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \left(x_2 - x_1\right) \cdots \left(x_n - x_1\right) \prod_{2 \le j < i \le n} \left(x_i - x_j\right) = \prod_{1 \le j < i \le n} \left(x_i - x_j\right)$$

**<u>תשובה 2 (סעיף ב):</u>**

נניח כי הדטרמיננטה שווה לאפס, אזי קיים פיתרון לא טריוויאלי למערכת

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ \vdots \\ \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \vdots \\ \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} + \ldots + a_{n-1} \begin{pmatrix} x_1^{n-1} \\ \\ \vdots \\ \\ x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

ז"א שלפולינום $a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ יש $n$ שורשים שונים : $x_1, \ldots, x_n$ בסתירה לכך שלפולינום ממעלה $n-1$ יש לכל היותר $n-1$ שורשים!

**תשובה 6:**

נבצע את פעולות העמודה הבאות על A : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ ו- $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ ( שאינן משפיעות על הדטרמיננטה):

$$\det A = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & 0 & 1 \\ t+2 & t-2 & 1 \\ 0 & t-2 & t+4 \end{vmatrix}$$

ניתן להוציא את הגורם $t+2$ מהעמודה הראשונה , ואת הגורם $t-2$ מהעמודה השניה ולקבל

$$= (t+2)(t-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t+4 \end{vmatrix} = (t+2)(t-2)(t+4)$$

ז"א $p(t) = (t+2)(t-2)(t+4)$ .

$$p(B) = (B+2I)(B-2I)(B+4I) = 0$$

קיים וקטור $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq 0$ כך ש $(tI-B)\bar{v} = \bar{0}$ שכן זוהי מערכת הומוגנית כש $|tI-B| = 0$ לכן קיים פיתרון ( אינסוף פיתרונות) שאינו טריוויאלי (שכן ניתן לוותר על אחת השורות ( כמובן לא בצורה שרירותית ) שכן דטרמיננטה שמתאפסת מלמדת על תלות לינארית בין השורות).

$|tI-B| = 0$ או"א $p(t) = 0$ או"א $t \in \{2,-2,-4\}$ ניקח למשל $t = 2$ אזי

$$2I - B = \begin{pmatrix} 2+3 & -1 & 1 \\ 5 & 2-3 & 1 \\ 6 & -6 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

השורות הראשונה והשניה תלויות לינארית לכן ניתן לוותר על אחת ונקבל את מערכת משוואות

$\begin{cases} 5v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$ נחסר שורה שניה מראשונה ונקבל ש $v_1 = 0$ נציב זאת בשורה השניה ונקבל

$v_2 = v_3$ לכן כל וקטור מהצורה $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ m \end{pmatrix}$ הוא טוב . ניקח לשם פשטות $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

עתה , מתקיים $(2I - B)\bar{v} = 0$ לכן נקבל ש $B\bar{v} = 2\bar{v}$ . תת- המרחב של $\mathbb{R}^3$ הנפרש ע"י הוקטור $\bar{v}$ מועתק לעצמו . זהו תת מרחב אינווריאנטי תחת ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י המטריצה B.