אלגברה לינארית 1 – פתרון תרגיל להגשה

סמסטר א', תשע"ו

הוראות התרגיל הזה הוא תרגיל רשות, הניתן כתרגול נוסף. אין חובה להגיש אותו, אך כל תרגיל שיוגש ייבדק (וכך תוכלו להתאמן על כתיבת פתרונות והוכחות). ניתן להגיש את התרגיל עד ל-7.1.16. מי שיגיש לאחר מכן – תרגילו לא ייבדק!

הערה חשובה בכל מקום בתרגיל הזה, כאשר יש שאלות "האם" או "הוכיחו או הפריכו", הכוונה היא: הוכיחו את הטענה, או מצאו דוגמה נגדית מפורשת.

בהצלחה!

הערה. לאורך כל התרגיל, כל המרחבים הווקטוריים הם ממימד סופי.

שאלה 1. נסתכל על $V=\mathbb{R}^n$, ונגדיר בו

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n | x_1+\cdots+x_n=0\} \\ W &= \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n | x_1=\cdots=x_n\} \end{aligned}$$

א. הוכיחו כי $U,W\subseteq V$ הם תת-מרחבים של V.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-U ול-W.

ג. הוכיחו כי $V=U\oplus W$.

פתרון.

א. ניעזר בקריטריון המקוצר. עבור U:

- $(0,\dots,0)\in U$, כי $0+0+\cdots+0=0$.
- יהיו $u_1,u_2\in U$, ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. צ"ל $\alpha u_1+\beta u_2\in U$.
נסמן $u_1=(x_1,\dots,x_n)$, $u_2=(y_1,\dots,y_n)$. כיוון ש-$u_1,u_2\in U$, מתקיים

$$x_1+\cdots+x_n=y_1+\cdots+y_n=0$$

נשים לב כי $\alpha u_1+\beta u_2=(\alpha x_1+\beta y_1,\dots,\alpha x_n+\beta y_n)$ מקיים

$$(\alpha x_1+\beta y_1)+\cdots+(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha\left(x_1+\cdots+x_n\right)+\beta\left(y_1+\cdots+y_n\right)=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

ומכאן $\alpha u_1+\beta u_2\in U$.

לכן, לפי הקריטריון המקוצר, U תת-מרחב של V.
עבור W:

- $(0,0,\dots,0)\in W$, כי $0=\cdots=0=0$.
- יהיו $w_1,w_2\in W$, ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. צ"ל $\alpha w_1+\beta w_2\in W$.
נסמן $w_1=(x_1,\dots,x_n)$, $w_2=(y_1,\dots,y_n)$. כיוון ש-$w_1,w_2\in W$, מתקיים

$$\begin{aligned} x_1=\cdots=x_n &= x \\ y_1=\cdots=y_n &= y \end{aligned}$$

(x ו-y הם סימונים). לכן

$$\alpha w_1+\beta w_2=(\alpha x+\beta y,\dots,\alpha x+\beta y)\in W$$

כדרוש.

לכן, לפי הקריטריון המקוצר, W תת-מרחב של V.

ב. <u>עבור U:</u> יהי $u=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)\in U$. כיוון ש-$x_1+\cdots+x_n=0$, מתקיים $x_n=-x_1-\cdots-x_{n-1}$. נציב בווקטור u, ונקבל

$$\begin{aligned} u &= (x_1,x_2,\dots,x_{n-1},-x_1-\cdots-x_{n-1})=x_1\cdot(1,0,\dots,0,-1)+ \\ &+ x_2\cdot(0,1,0,\dots,0,-1)+\cdots+x_{n-1}\cdot(0,\dots,0,1,-1) \end{aligned}$$

לכן הקבוצה

$$B_1=\left\{(1,0,\dots,0,-1),(0,1,0,\dots,0,-1),\dots,(0,\dots,0,1,-1)\right\}\subseteq U$$

(פורמלי יותר: $B_1=\{e_1-e_n,e_2-e_n,\dots,e_{n-1}-e_n\}$) פורשת את U. נוכיח ש-B_1 בת"ל, וזה יוכיח ש-B_1 בסיס של U.
יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1(1,0,\dots,0,-1)+\alpha_2(0,1,0,\dots,0,-1)+\cdots+\alpha_{n-1}(0,\dots,0,1,-1)=0$$

נחבר את הווקטורים ונקבל

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1},-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})=(0,0,\dots,0)$$

מהשוואת $n-1$ הקואורדינטות הראשונות רואים שמתקיים $\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-1}=0$, ולכן B_1 בת"ל.
בסך הכל, B_1 בסיס של U, ולכן $\dim U=n-1$.
<u>עבור W:</u> יהי $w=(x_1,\dots,x_n)\in W$. כיוון ש-$x_1=\cdots=x_n$, נקבל

$$w=(x_1,\dots,x_1)=x_1\cdot(1,\dots,1)$$

לכן הקבוצה $B_2=\{(1,\dots,1)\}\subseteq W$ פורשת את W. אנחנו יודעים שכל קבוצה עם וקטור אחד שאינו וקטור האפס היא בת"ל, ולכן B_2 בת"ל.
בסך הכל, B_2 בסיס של W, ולכן $\dim W=1$.

ג. צריך להוכיח שני דברים:

- $U \cap W = \{0\}$: יהי $v \in U \cap W$. נסמן $v = (x_1, \dots, x_n)$.
$v \in W$, ולכן $x_1 = \dots = x_n$.
$v \in U$, ולכן
$$n \cdot x_1 = x_1 + \dots + x_1 = x_1 + \dots + x_n = 0$$
נחלק ב-n ונקבל $x_1 = 0$. לכן $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, כלומר $v = 0$. בסך הכל, $U \cap W = \{0\}$.
- $\dim U + \dim W = \dim V$: לפי החישובים להלן, $\dim U = n-1$ ו-$\dim W = 1$. כמו כן, ידוע כי $\dim V = \dim \mathbb{R}^n = n$, ולכן נקבל
$$\dim U + \dim W = (n-1) + 1 = n = \dim V$$

לסיכום, נקבל $U \oplus W = V$.

שאלה 2. יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $U \subseteq V$ תת-מרחב של V.

א. הוכיחו כי קיים תת-מרחב $W \subseteq V$ של V שעבורו $V = U \oplus W$.

ב. האם W הזה יחיד? כלומר, אם $U \oplus W = V = U \oplus W'$, האם בהכרח $W = W'$?

פתרון.

א. יהי B_1 בסיס של U. נשלים את B_1 לבסיס B של V. נגדיר $B_2 = B \setminus B_1$ ו-$W = \text{Span}\,(B_2)$. נרצה להראות כי $V = U \oplus W$. נשים לב כי:

- $V = U + W$, כי
$$V = \text{Span}\,(B) = \text{Span}\,(B_1 \cup (B \setminus B_1)) = \text{Span}\,(B_1) + \text{Span}\,(B \setminus B_1) = U + W$$
- $\dim V = \dim U + \dim W$, כי
$$\dim V = |B| = |B_1 \cup (B \setminus B_1)| \overset{(\star)}{=} |B_1| + |B \setminus B_1| = \dim U + \dim W$$
כאשר המעבר $(\star)$ מסתמך על כך שהקבוצות B_1 ו-$B \setminus B_1$ זרות.

כעת נסיק כי $V = U \oplus W$: לפי משפט המימדים,
$$\dim V = \dim\,(U + W) = \dim U + \dim W - \dim\,(U \cap W) = \dim V - \dim\,(U \cap W)$$
לכן $\dim\,(U \cap W) = 0$, כלומר $U \cap W = \{0\}$. לכן הסכום ישר, והוכחנו $V = U \oplus W$.
(**הערה:** אפשר גם להוכיח ישירות שהסכום הוא ישר, כלומר עם החיתוך, וזה יכליל את ההוכחה הזו למרחבים וקטוריים אינסוף מימדיים).

ב. הסבר: W הזה אינו יחיד, כי אפשר להשלים את B_1 בדרכים רבות לבסיס B של V.
דוגמה: ניקח $V = \mathbb{R}^2$, $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W' = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.
ודאו כי באמת
$$U \oplus W = U \oplus W' = V$$

שאלה 3. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים שלו המקיימים $\dim U + \dim W > \dim V$. הוכיחו:

א. $V \neq U \oplus W$.

ב. אם $V = U + W$, אזי קיים תת-מרחב $W' \subseteq W$ שעבורו $V = U \oplus W'$.

הוכחה.

א. הבעיה היא ש-$U \cap W \neq \{0\}$.
כמו בתרגול, נוכיח כי מהנתון $\dim U + \dim W > \dim V$ נובע $U \cap W \neq \{0\}$: לפי משפט המימדים,

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) > \dim V - \dim(U \cap W)$$

אבל $U + W \leq V$, לכן

$$\dim(U+W) \leq \dim V \Rightarrow \dim V - \dim(U \cap W) < \dim V \Rightarrow \dim(U \cap W) > 0$$

לכן $U \cap W \neq \{0\}$, כלומר הסכום אינו ישר.

ב. נתון כי $V = U + W$, אבל $\dim U + \dim W > \dim V$. נתחיל כמו בהוכחת משפט המימדים: יהי $B_1 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ בסיס של $U \cap W$. B_1 בת"ל ב-U, ולכן אפשר להשלים אותו לבסיס $B_2 = \{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_\ell\}$ של U; B_1 בת"ל גם ב-W, ולכן אפשר להשלים אותו לבסיס $B_3 = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m\}$ של W. לפי הוכחת משפט המימדים, $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_\ell, w_1, \ldots, w_m\}$ בסיס של $V = U + W$. נגדיר

$$W' = \text{Span}\{w_1, \ldots, w_m\}$$

לפי ההגדרה, $W' \leq W$. נבדוק כי $U \oplus W' = V$ כמו בשאלה 2:

- $V = U + W'$, כי

$$\begin{aligned} U + W' &= \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_\ell\} + \text{Span}\{w_1, \ldots, w_m\} = \\ &= \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_\ell, w_1, \ldots, w_m\} = V \end{aligned}$$

- $\dim U + \dim W' = k + \ell + m = \dim V$.

כמו בשאלה 2, מכאן נובע ש-$V = U \oplus W'$.

$\square$

שאלה 4. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי B בסיס סדור של V, ותהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה הפיכה. הראו כי קיים בסיס סדור B' של V יחיד שעבורו $[I]_{B'}^{B} = A$.

הוכחה. בתרגול ראינו שאלה מאוד דומה, ולא סתם – נשתמש במה שעשינו בתרגול כדי להוכיח את השאלה הזו.

קיום. A^{-1} מטריצה הפיכה; לפי התרגיל מהתרגול, קיים בסיס B' של V שעבורו $[I]_B^{B'} = A^{-1}$. לכן

$$[I]_{B'}^{B} = \left([I]_B^{B'}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

כלומר הבסיס B' הזה מקיים את הדרוש.

יחידות. נניח כי B_1 ו-B_2 שני בסיסים כאלו. אזי

$$[I]_{B_1}^{B} = [I]_{B_2}^{B}$$

נכפול ב-$[I]_B^{B_2}$ מימין, ונקבל

$$[I]_{B_1}^{B_2} = [I]_{B_1}^{B}\,[I]_B^{B_2} = [I]_{B_2}^{B}\,[I]_B^{B_2} = I$$

נסמן $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$. המשוואה האחרונה אומרת שלכל $1 \le i \le n$,

$$[w_i]_{B_1} = e_i \Rightarrow w_i = v_i$$

(לפי הגדרת מטריצת מעבר ווקטור קואורדינטות). לכן $B_1 = B_2$, כדרוש.

$\square$

הערה. היו הרבה שבנו את הבסיס הזה ישירות. הנה הבנייה: נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. רוצים למצוא בסיס $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ שעבורו

$$[I]_{B'}^{B} = A \Rightarrow [I]_B^{B'} = A^{-1}$$

נסמן $A^{-1} = \left(a'_{ij}\right)$. לכן

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [w_1]_B & \cdots & [w_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix} = [I]_B^{B'} = A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

נשווה עמודות, ונקבל שלכל $1 \le i \le n$,

$$[w_i]_B = C_i\left(A^{-1}\right) = \begin{pmatrix} a'_{1i} \\ \vdots \\ a'_{ni} \end{pmatrix}$$

ומכאן

$$w_i = a'_{1i} v_1 + \cdots + a'_{ni} v_n$$

שאלה 5.

א. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצות. הוכיחו או הפריכו:

- $\text{rank}\,(A+B) \le \text{rank}\,(A) + \text{rank}\,(B)$.
- $\text{rank}\,(A+B) \ge \text{rank}\,(A) + \text{rank}\,(B)$.

ב. תהיינה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ו-$B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ מטריצות, ונניח $m > n$. האם ייתכן ש-AB הפיכה? האם ייתכן ש-BA הפיכה?

ג. הוכיחו: כל מטריצה הפיכה היא בהכרח ריבועית.

פתרון.

א. • הוכחה: ראשית, נוכיח $C(A+B) \subseteq C(A)+C(B)$. אכן, נשים לב כי לכל $1 \le j \le n$,

$$C_j(A+B) = C_j(A)+C_j(B) \in \text{Span}\{C_1(A),\dots,C_n(A),C_1(B),\dots,C_n(B)\}$$

ולכן

$$\begin{aligned} C(A+B) &= \text{Span}\{C_1(A+B),\dots,C_n(A+B)\} \subseteq \\ &\subseteq \text{Span}\{C_1(A),\dots,C_n(A),C_1(B),\dots,C_n(B)\} = \\ &= \text{Span}\{C_1(A),\dots,C_n(A)\} + \text{Span}\{C_1(B),\dots,C_n(B)\} = C(A)+C(B) \end{aligned}$$

מכאן נקבל

$$\begin{aligned} \text{rank}(A+B) &= \dim C(A+B) \le \dim(C(A)+C(B)) = \\ &= \dim C(A) + \dim C(B) - \dim(C(A)\cap C(B)) \le \\ &\le \dim C(A) + \dim C(B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \end{aligned}$$

• הפרכה: ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = -A$. אזי $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$, כלומר $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = 2$, אבל $A+B=0$, ומכאן $\text{rank}(A+B) = 0$.

שאלה 6. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה, כך שלכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון למערכת $Ax=b$. הוכיחו כי לכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד למערכת $Ax=b$.

הוכחה. ניעזר במשפט הבא: למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b \in C(A)$.
לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון למערכת $Ax=b$, ולכן $\mathbb{F}^n \subseteq C(A) \subseteq \mathbb{F}^n$. לכן $C(A)=\mathbb{F}^n$. לפי משפט מההרצאה, זה אומר ש-A הפיכה. לכן לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון יחיד למערכת $Ax=b$. $\square$