תרגיל בית 3

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A. במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

פתרון: ראינו כי $x \in C$ אמ"מ ניתן לייצג אותו באופן הבא

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \qquad a_n \in \{0,2\}$$

ניקח את הסדרה הבאה:

$$x_1 = 0._3 a_1$$
$$x_2 = 0._3 a_1 a_2$$
$$\vdots$$
$$x_k = 0._3 a_1 a_2 \dots a_k$$
$$\vdots$$

כאשר $0._3\dots$ מסמל ייצוג טרינארי. ברור מהבנייה כי $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ומכאן של C אין נקודות מבודדות ו C קבוצה מושלמת.

2. נניח כי m הינה מידת לבג ו $A \subseteq \mathbb{R}$ הינה קבוצה מדידה בורל כך ש $m(A) > 0$. הוכיחו כי אם

$$B = \{x - y : x, y \in A\}$$

אזי B מכילה קטע פתוח לא ריק סביב 0.

הדרכה:

i. הניחו ללא הגבלת הכלליות כי $0 < m(A) < \infty$. מצאו קבוצה פתוחה G כך ש $A \subseteq G$ וגם $m(A) > \frac{3}{4} m(G)$. הראו כי אז קיים קטע פתוח I כך ש $m(A \cap I) > \frac{3}{4} m(I)$.

ii. הראו כי אם $\delta = \frac{1}{2} m(I)$ נובע כי לכל $x \in (-\delta, \delta)$ הקטע $I \cup \{x + I\}$ מכיל את $A \cap I \cup \{x + A \cap I\}$ ואורכו קטן מ $\frac{3}{2} m(I)$. הסיקו בעזרת הסעיף הקודם כי $A \cap I \cap \{x + A \cap I\} \neq \varnothing$.

iii. הסיקו כי $x \in B$.

פתרון:

i. נניח כי $0<m(A)<\infty$ אחרת נחתוך את A עם $[-n,n]$ עבור n גדול מספיק על מנת לקבל את הדרוש. ראינו כבר כי ניתן להתקרב לקבוצה מדידה עם קבוצה פתוחה שמכילה אותה ולכן בהכרח קיימת G כך ש $m(A)>\frac{3}{4}m(G)$. מכיוון ש G הינה איחוד זר של קטעים פתוחים זרים נובע כי קיים אינטרוול I כך ש $m(A\cap I)>\frac{3}{4}m(I)$.

ii. אם $\delta=\frac{1}{2}m(I)$ נובע כי לכל $x\in(-\delta,\delta)$ הקטע $I\cup\{x+I\}$ מכיל את $A\cap I\cup\{x+A\cap I\}$ ואורכו קטן מ $\frac{3}{2}m(I)$, מכיוון ש $m(A\cap I)>\frac{3}{4}m(I)$ והמידה של $A\cap I$ שווה לזאת של $\{x+A\cap I\}$, הן אינן יכולות להיות זרות אחרת נקבל כי $m(A\cap I\cup\{x+A\cap I\})>\frac{3}{2}m(I)$ בסתירה למה שהראינו.

iii. אם $\{x+A\cap I\}$ ו $A\cap I$ אינן זרות אזי נובע כי $x\in B$.

3. נניח כי A הינה מדידה לבג ב $\mathbb{R}$ ו

$$B=\bigcup_{x\in A}[x-1,x+1]$$

הוכיחו כי B הינה מדידה לבג.

הדרכה:

i. הסתכלו על $\bigcup_{x\in A}(x-1,x+1)$ והסיקו כי זוהי קבוצה מדידה.

ii. בטאו את $B/\bigcup_{x\in A}(x-1,x+1)$ בעזרת הקבוצה A והסיקו כי גם היא מדידה.

פתרון:

i. $\bigcup_{x\in A}(x-1,x+1)$ הינה קבוצה מדידה שכן היא פתוחה.

ii. $B/\bigcup_{x\in A}(x-1,x+1)=A-1\cup A+1$ ולכן מדידה. נובע כי B מדידה.