המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 05 – סמסטר ב' תשע"ז, 16.7.16 מבחן מועד א'

המרצה: מיכאל מגרל המתרגלים: תמר נחשוני, אלעד עטייא, שירה גילד

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.

ב. משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

שאלות ופתרונות:

1.

א. במרחב מטרי $(\mathbb{Z},d_3)$ לחשב השפה $\partial(A)$ של תת קבוצה $A=5\mathbb{Z}$.

ב. הוכיחו שכל מרחב מטריזבילי הוא מרחב T_4.

פתרון:

א. (החלק העיקרי על $\mathrm{cl}(A)$ היה בשיעורי בית 4)

$\partial(A)=\mathrm{cl}(A)\setminus\mathrm{int}(A)=\mathbb{Z}\setminus\varnothing=\mathbb{Z}.$

מצד אחד $\mathrm{cl}(A)=\mathbb{Z}$

הסבר: (שיעורי בית 4).

נוכיח שכל $z\in\mathbb{Z}$ שייך ל $\mathrm{scl}(A)$. מ"ל עבור $z=1\in\mathbb{Z}$ כי אם $\lim a_n=1, a_n\in5\mathbb{Z}$

אזי $\lim z a_n=z, z a_n\in5\mathbb{Z}$ (שימו לב $d_3(zx,zy)\le d_3(x,y)$).

המספרים $3^n,5$ הם זרים לכן קיים $c_n\in\mathbb{Z}$ כך ש $c_n\cdot3^n\equiv1\bmod5$. אזי

$a_n:=1-c_n\cdot3^n\in5\mathbb{Z}$ וגם $\lim a_n=1$.

שימו לב ש $d_3(1-c_n\cdot3^n,1)\le d_3(3^n,0)=\frac{1}{3^n}\to0$.

מצד שני $\mathrm{int}(A)=\varnothing$. הסבר:

נניח קיימים $x\in5\mathbb{Z},r>0$ כך ש $B_r(x)\subseteq5\mathbb{Z}$.

אז קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש $x+3^k\mathbb{Z}\subseteq B_r(x)$. מכאן $3^k\in5\mathbb{Z}$. סתירה!

ב. משפט שהוכחנו בהרצאה.

2.

א. נתון מרחב X בצורת 8 (כתת מרחב טופולוגי של המישור). כמה מסלולים קיימים לגבי פעולה טבעית של חבורת הומיאומורפיזמים $G:=Homeo(X)$ על קבוצה X?

ב. נניח $X:=S_1\times S_1$ (טורוס 2-ממדי) ו $Y:=\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ חזקה טופולוגית של מספרים רציונליים (טופולוגית מכפלה). הוכיחו או הפריכו: לכל שתי נקודות שונות $x,y\in X$ קיימת פונקציה רציפה $f:X\to Y$ כך ש $f(x)\ne f(y)$.

פתרון:

א. (דומה לתרגיל שפתרנו בהרצאה)
יש 2 מסלולים.
מסלול 1 הוא מורכב מנקודת המרכז (נסמן אותו ב z) – נקודת ההשקה של שני מעגלים.
z זאת נקודה יחידה בעקום שמחלק אותו.
שאר הנקודות מרכיבים מסלול שני.
לכל זוג $x,y\in X$ נקודות שכל אחת שונה מ z קיים הומאומורפיזם $f:X\to X,\, f(x)=y$.
אם הנקודות הנ"ל שייכות לאותו מעגל אז אפשר למתוח אותו מעגל להעביר x ל y כך ש z
וכל הנקודות במעגל השני נשארים במקום.
אם הנקודות x, y שייכים למעגלים שונים אז שימו לב שיש הומיאומורפיזם טבעי שמחליף בין המעגלים. למשל סימטריה לגבי ציר משיק בנקודה z. ואז אפשר להשתמש בהרכבת הומיאומורפיזמים.

ב. לא נכון. יותר מזה: כל פונקציה רציפה $f:S_1\times S_1\to\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ היא בהכרח קבועה.
הסבר: מעגל (יחידה) S_1 הוא קשיר כתמונה רציפה של ממשיים. אז
$X:=S_1\times S_1$ קשיר כמכפלה של מרחבים קשירים. ראינו בהרצאה שמכפלה שומרת על הקשירות. מצד שני כמו שהסברנו בהרצאה מרחב $\mathbb{Q}$ הוא לא קשיר לחלוטין (לא מכיל אף קטע ששונה מנקודה). זאת אומרת כל מרכיב קשירות שלו הוא רק נקודון. אז גם מכפלה $Y:=\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ זה מרחב לא קשיר לחלוטין (היטלים).
אם נניח בשלילה ש $f:S_1\times S_1\to\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ לא קבועה אז נקבל תת מרחב קשיר $f(S_1\times S_1)$ של $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ששונה מנקודון. סתירה !

3.

א. הוכיחו שאם $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, על וסגורה אז $f:X\to Y$ היא העתקת מנה.
ב. בעזרת סעיף א הוכיחו שהפונקציה $q:[0,1]^2\to T^2,\, q(x,y)=(cis2\pi x, cis2\pi\sqrt{2}y)$ היא העתקת מנה כאשר $T=\{z\in\mathbb{C}:\ \ ||z||=1\}$.
ג. בעזרת סעיף ב הוכיחו שהפונקציה $\mathbb{R}^2\to T^2,\, q(x,y)=(cis2\pi x, cis2\pi\sqrt{2}y)$ היא העתקת מנה.

פתרון:

א. נניח A תת קבוצה ב Y כך ש $f^{-1}(A)$ פתוחה ב X. צ"ל ש A פתוחה ב Y.
$f^{-1}(A)$ פתוחה לכן המשלים סגור. מכאן $f^{-1}(A^c)=f^{-1}(A)^c$ סגור. נתון שהפונקציה $f:X\to Y$ סגורה. אז גם $f(f^{-1}(A^c))=A^c$ הוא סגור. מכאן A פתוחה. מש"ל.
ב. הפונקציה q היא <u>סגורה</u> כפונקציה ממרחב קומפקטי $[0,1]^2$ (קומפקטיות ברורה ממשפט Heine-Borel למשל) למרחב האוסדורפי T^2.
ג. נניח A תת קבוצה ב T^2 כך ש $q^{-1}(A)$ פתוחה ב $\mathbb{R}^2$. צ"ל ש A פתוחה ב T^2.

נסמן ב $q_0:[0,1]^2 \to T^2$ צמצום של $q:\mathbb{R}^2 \to T^2$ על תת קבוצה $[0,1]^2$ של $\mathbb{R}^2$.
נסמן ב $i:[0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ שיכון טבעי. אז ברור ש $q_0 = q \circ i$. לכן $i^{-1}(q^{-1}(A)) = q_0^{-1}(A)$.
נמהרציפות של i הקבוצה $i^{-1}(q^{-1}(A)) = q_0^{-1}(A)$ פתוחה ב $[0,1]^2$. לפי סעיף ב אנו יודעים ש $q_0:[0,1]^2 \to T^2$ היא העתקת מנה. לכן מהפתיחות של $q_0^{-1}(A)$ אפשר לקבוע ש A פתוחה.

4. א. הוכיחו שאם מרחב טופולוגי הוא ספרבילי אז גם תת קבוצה פתוחה ספרבילית. תנו דוגמה נגדית אם תת קבוצה לא פתוחה.
ב. הוכיחו שמכפלה טופולוגית של מרחבים עם תכונת T_1 הוא גם מרחב עם תכונת T_1.

פתרון:

א. (שאלה משיעורי בית מספר 7)
אפשרות אחרת לפתרון של חלק ראשון: אפשר להשתמש גם בשאלה 2א משיעורי בית מספר 6.
זאת אומרת: אם U קבוצה פתוחה ב X ו A צפופה ב X אז מתקיים: $U \subseteq cl(A \cap U)$.
אפשרות נוספת בחלק שני: (כמו בהרצאה) לקחת תת מרחב לא ספרבילי $Y := \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ במישור Sorgenfrey (שהוא ספרבילי).

ב. (היה בתירגול)
אפשרות נוספת: מ"ל שכל נקודה $x = (x_i)_{i\in I}$ סגורה במכפלה טופולוגית $X = \prod_{i\in I} X_i$ בתנאי שכל גורם $X_i \in T_1$. שימו לב שאז כל נקודה x_i היא סגורה ב X_i ו $\{x\} = \bigcap_{i\in I} p_i^{-1}(x_i)$.

<u>שאלת בונוס</u> (5 נקודות):
תנו דוגמה של מרחב מטרי וכיסוי פתוח בו ללא מספר לבג.
פתרון:

(פתרנו בהרצאה)
$X = (0,1)$ אז $\alpha := \{(\frac{1}{n},1) : n \in \mathbb{N}\}$ כיסוי פתוח של X ללא מספר לבג.
אם קיים δ מספר לבג של α אז כדור $B_\delta(x) = (0,2\delta) \cap (0,1)$ עם $x = \delta$ הוא לא מוכל באף אינטרוול $(\frac{1}{n},1)$.