תורת הקבוצות־ תרגיל בית 4

1. הוכיחו: $n \cdot \omega = \omega$ לכל n טבעי.
הוכחה:
יהי n טבעי נתון. $n \cdot \omega = n\sup\{m : m \in \omega\} = \sup\{nm : m \in \omega\} = \omega$.

2. הוכיחו את חוק הפילוג מימין: $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.
הוכיחו שאין פילוג משמאל.
פתרון:
פילוג מימין: $\alpha(\beta+\gamma) = type((\beta+\gamma)\times\alpha)$. כלומר, יש איזו סדר ל $(\beta+\gamma)\times\alpha$.
בנוסף, $\beta+\gamma = type((\{0\}\times\beta)\cup(\{1\}\times\gamma))$. לכן, $\alpha(\beta+\gamma)$ איזומורפי סדר ל $((\{0\}\times\beta)\cup(\{1\}\times\gamma))\times\alpha = ((\{0\}\times\beta)\times\alpha)\cup((\{1\}\times\gamma)\times\alpha)$.
מצד שני, $\alpha\beta+\alpha\gamma = type((\{0\}\times\alpha\beta)\cup(\{1\}\times\alpha\gamma))$. אבל, יש איזו' סדר מ$\alpha\beta$ ל $\beta\times\alpha$, ומ$\alpha\gamma$ ל $\gamma\times\alpha$. לכן, $\alpha\beta+\alpha\gamma$ איזומורפי ל $(\{0\}\times\beta\times\alpha)\cup(\{1\}\times\gamma\times\alpha)$.
לכן, $\alpha(\beta+\gamma)\cong\alpha\beta+\alpha\gamma$. ומכיוון שזה סודרים, זה אומר שהם שווים.
פילוג משמאל: נקח $\alpha=\omega, \beta=\gamma=1$. נקבל: $(1+1)\omega = 2\omega = \omega \neq \omega+\omega$

3. הוכיחו: $\alpha\beta$ גבולי $\Longleftrightarrow$ β גבולי או α גבולי.
פתרון:
אם אחד מהסודרים הוא 0, המכפלה 0. (0 הוא סודר גבולי)
נניח ששניהם שונים מ0.
אם βגבולי אז הוכחתם בהרצאה ש $\alpha\beta$ גבולי.
אם β עוקב, אז $\beta=\gamma+1$ לאיזשהו סודר γ. ואז: $\alpha\beta = \alpha(\gamma+1) = \alpha\gamma+\alpha$. וזה גבולי אמ"ם α גבולי.

4. הוכיחו: $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.
פתרון:
נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית על γ.
עבור $\gamma=0$: $\alpha^{\beta\cdot 0} = \alpha^0 = 1$.
$(\alpha^\beta)^0 = 1$.
נניח נכונות לγ. נוכיח ל$\gamma+1$.
$\alpha^{\beta(\gamma+1)} = \alpha^{\beta\gamma+\beta} = \alpha^{\beta\gamma}\alpha^\beta = (\alpha^\beta)^\gamma\alpha^\beta = (\alpha^\beta)^{\gamma+1}$.
כעת, חהי γ גבולי, ונניח נכונות לכל $\delta<\gamma$.
$\alpha^{\beta\gamma} = \sup\{\alpha^{\beta\delta} : \delta<\beta\} = \{(\alpha^\beta)^\delta : \delta<\gamma\} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

5. חשבו: (כלומר, מהי שארית החלוקה)
א. $(\omega+\omega) \mod 5$
ב. $\omega^2 \mod (\omega+2)$.
פתרון:
א. טענה: $\omega+\omega = 5(\omega+\omega)$.
הסבר: $5(\omega+\omega) = 5\omega+5\omega = \omega+\omega$.
לכן השארית היא 0 .
ב. טענה: $\omega^2 = (\omega+2)\omega$.

הוכחה: ω גבולי, ולכן:
$(\omega+2)\omega = (\omega+2)\sup\{n : n<\omega\} = \sup\{(\omega+2)n : n<\omega\} = \sup\{\omega n+2 : n<\omega\} = \sup\{\omega n : n<\omega\} = \omega\sup\{n : n<\omega\} = \omega\cdot\omega = \omega^2$
(שימו לב: $(\omega+2)\cdot n = \omega\cdot n+2$ מכיוון ש $(\omega+2)n = (\omega+2)+...+(\omega+2) = \omega+(2+\omega)+...+(2+\omega)+2 = \omega+...+\omega+2 = \omega\cdot n+2$)
מסקנה: $\omega^2 \mod (\omega+2) = 0$
6. הוכח/הפרך: אם $\alpha>\beta$ אז $\alpha^\gamma > \beta^\gamma$.
הפרכה:
נקח $\alpha=3, beta=2, \gamma=\omega$. ראינו בתרגול ש$\omega = 2^\omega$. באופן דומה ניתן להוכיח ש$\omega = 3^\omega$. וקיבלנו ש $3^\omega \not> 2^\omega$/