מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 6 - פתרון

1. <u>הגדרה</u>. הקבצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת *תחום כוכבי* ב-$\mathbb{R}^n$ (*עם המרכז בנקודה* $o \in A$) אם לכל $x \in A$ מתקיים $[o,x] \subseteq A$.
<u>הוכיחו</u> שכל תחום כוכבי ב-$\mathbb{R}^n$ הוא תת מרחב קשיר מסילתית.

<u>הוחכה</u>

<u>תזכורת.</u> <u>הגדרה</u>. יהי X מרחב ווקטורי (או בפרט, $\mathbb{R}^n$).
יהיו $a, b \in X$.
תת קבוצה $[a,b] = \{(1-t)a + tb | t \in [0,1]\} \subset X$ נקראת *קטע ב-*X .

יהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום כוכבי עם מרכז $o \in A$. יהיו $a, b \in A$.
אזי פונקציה $\varphi_1: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי נוסחה $\varphi_1(t) = (1-t)a + to$ רציפה (מוזכר בהרצאה). תמונתה $[a,o] = \varphi_1([0,1])$ מוכלת ב-A לפי התנאי. לכן פונקציה $\widehat{\varphi_1}: [0,1] \to A$ המתקבלת מ-φ_1 על ידי צימצום הטווח ל-A, היא מסילה ב-A מ-a ל-o .
בידיוק באותה דרך אפשר לבנות מסילה $\widehat{\varphi_2}: [0,1] \to A$ מ-b ל-o . אזי המסילה $\overline{\widehat{\varphi_2}}: [0,1] \to A$ היא מסילה מ-o ל-b .
עכשיו על ידי השירשור $\widehat{\varphi_1} * \overline{\widehat{\varphi_2}}$ מקבלים מסילה ב-A מ-a ל-b .
לכן תת מרחב טופולוגי A קשיר מסילתית, מש"ל.

2. יהי X מ"ט כך שלכל x קיימת סביבה U_x קשירה מסילתית.
<u>הוכיחו</u> שכל רכ"מ במרחב הזה פתוח.

הוכיחה.
יהי P רכ"מ ו- $x \in P$. לפי התנאי סביבה U_x קשירה מסילתית כך ש-$x \in U_x$. לפי התכונות של רכ"מים (הארצאה) $U_x \subseteq P$. לפי הלמה השימושית $\cup_{x\in P} U_x = P$. לכן P קבוצה פתוחה, משל.

3. יהיו (X,τ_1) , (X,τ_2) שני מ"ט, כך ש-$\tau_1 \subseteq \tau_2$.
א' יהי (X,τ_1) קומפקטי . הוכיחו ש-(X,τ_2) קומפקטי.
ב' יהי (X,τ_2) האוסדורף. הוכיחו ש-(X,τ_1) האוסדורף.

היכחה
א' יהי $\mathcal{C}$ כיסוי פתוח של (X,τ_2). אזי כל איבריו מוכלים ב-τ_2 ולפי התנאי הם מוכלים גם ב-τ_1. כיוון ש-(X,τ_1) קומפקטי $\mathcal{C}$ מכיל תת כיסוי $\mathcal{F}$ סופי.זה לשי הגדרת הקומפקטיות מוכיח את הקומפקטיות של (X,τ_2).

ב' יהיו $a,b \in X$ כך ש- $a \neq b$. אזי (כיוון ש- (X,τ_2) האוסדורף) קיימות קבוצות $U,V \in \tau_2$ כך ש- $a \in U, b \in V$ ו- $U \cap V = \emptyset$.
אבל לפי התנאי U,V שייכות גם ל-τ_1. לכן גם (X,τ_1) מ"ט האוסדורף, מש"ל.

4. יהיו $A,B \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות זרות סגורות וחסמות.
הוכיחו שקיימות קבוצות U,V פתוחות וזרות כך ש- $A \subseteq U$ ו- $B \subseteq V$.

היכחה.
לפי משפט היינה – בורל A,B קבוצות קומפקטיות. לפי ההרצאה, $\mathbb{R}^n$ מרחב האוסדורף. אזי, לפי משפט מההרצאה, קיימות קבוצות U,V פתוחות וזרות כך ש- $A \subseteq U$ ו- $B \subseteq V$, מש"ל.

5. <u>הוכיחו</u> שמ"ט X הוא מרחב האוסדורף אם"ם לכל $x \in X$ מתקיים:

$$\bigcap_{\substack{x \in F^\circ \\ \text{סגורה}-F}} F = \{x\}$$

<u>הוכחה</u>. <u>כיוון 1</u>

$$\{\boldsymbol{x}\} \subseteq \bigcap_{\substack{x \in F^\circ \\ \text{סגורה}-F}} F$$

פנים של קבוצה במ"ט מוכל בקבוצה עצמה. לכן לכל F סגורה כך ש-$x \in F^\circ$ מתקיים $x \in F^\circ \subseteq F$. מכאן:

$$x \in \bigcap_{\substack{x \in F^\circ \\ \text{סגורה}-F}} F \Rightarrow \{x\} \subseteq \bigcap_{\substack{x \in F^\circ \\ \text{סגורה}-F}} F$$

<u>כיוון 2</u>

$$\bigcap_{\substack{x \in F^\circ \\ \text{סגורה}-F}} F \subseteq \{\boldsymbol{x}\}$$

נניח, $x \neq y$. כיוון שהמרחב הוא מ"ט האוסדורף, קיימות סביבות U_x, V_y כך ש-$x \in U_x, y \in V_y$ ו- $U_x \cap V_y = \emptyset$.
נסמן: $F_0 \coloneqq V_y^c$. לכן $y \notin F_0$.
F_0 סגורה ו- $U_x \subseteq F_0$. לכן $x \in F_0^\circ$. כיוון ש- $y \notin F_0$:

$$y \notin \bigcap_{\substack{x \in F^\circ \\ \text{סגורה}-F}} F$$

כלומר, החיתוך לא מכיל איברים שונים מ-x, זאת אומרת:

$$\bigcap_{\substack{x \in F^\circ \\ \text{סגורה}-F}} F \subseteq \{x\}$$

מש"ל.

6. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, Y מרחב האוסדורף
ו- $f,g\colon X\to Y$ שתי פונקציות רציפות.
<u>הוכיחו</u> שתת-קבוצה $\{x\in X|f(x)=g(x)\}$ סגורה.

<u>הוכחה .</u>
נסמן: $G\coloneqq\{x\in X|f(x)\neq g(x)\}$. נוכיח ש-G פתוחה.
לכל $x\in G$ נבנה סביבה $x\in U_x$ כך $U_x\subseteq G$.

<u>בנייה</u>
יהי $x\in G$. כיוון ש- $f(x)\neq g(x)$ ו- Y מרחב האוסדורף,
קיימות סביבות $V_{f(x)},V_{g(x)}\subseteq Y$ כך
ש- $f(x)\in V_{f(x)}$, $g(x)\in V_{g(x)}$ ו- $V_{f(x)}\cap V_{g(x)}=\emptyset$.
פונקציות f,g רציפות ולכן הן רציפות בנקודה x. אזי קיימות סביבות
$x\in U_x',U_x''$
כך ש- $f(U_x')\subseteq V_{f(x)}$ ו- $g(U_x'')\subseteq V_{g(x)}$. נסמן: $U_x=U_x'\cap U_x''$.
אז נקבל $f(U_x)\subseteq V_{f(x)}$ ו- $g(U_x)\subseteq V_{g(x)}$.

כיוון ש- $V_{f(x)}\cap V_{g(x)}=\emptyset$, לכל $z\in U_x$ מתקיים $f(z)\neq g(z)$
ולכן $U_x\subseteq G$.
<u>סוף הבנייה</u>.
לפי הלמה השימושית אנחנו מסיקים ש-
$$G=\bigcup_{x\in G}U_x$$
לכן G קבוצה פתוחה כאחוד פתוחות. מזה מייד נובע
ש- $\{x\in X|f(x)=g(x)\}=G^c$ קבוצה סגורה, מש"ל