אינפי 4 תרגיל 3 פתרון

15 באפריל 2015

1. נחשב את האינטגרלים בעזרת הנוסחה: $\int_C \omega d\underline{x} = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

א. פרמטריזציה של העקומה שלנו היא:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

ולכן:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t, -\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -\frac{\pi}{2}$$

ב. פרמטריזציה של העקומה שלנו היא:

$$\gamma(t) = (t, t^3), t \in [0, 1]$$

ולכן:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = \int\limits_0^1 (\sqrt{t}, \sqrt{t^3}) \cdot (1, 3t^2)dt = \int\limits_0^1 (\sqrt{t} + 3t^{\frac{7}{2}})dt = (\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}})|_0^1 = \frac{4}{3}$$

ג. פרמטריזציה של העקומה שלנו היא:

$$\gamma(t) = (t, \ln t), t \in [1, e]$$

ולכן:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = \int\limits_1^e (\frac{\ln t}{t}, 1) \cdot (1, \frac{1}{t})dt = \int\limits_1^e (\frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t})dt = \left(\frac{\ln^2 t}{2} + \ln t\right)|_1^e = \frac{3}{2}$$

ד. פרמטריזציה של העקומה שלנו היא:

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

ולכן:

$$\int_C \omega d\underline{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b^2\sin^2 t, ab\cos t\sin t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)dt = ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(\sin^2 t - \cos^2 t)dt =$$

$$= ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos 2t dt = ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin 3t + \sin(-t))dt = \frac{1}{2}ab^2(-\frac{1}{3}\cos 3t + \cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{ab^2}{3}$$

ה. פרמטריזציה של העקומה שלנו היא:

$$\gamma(t) = (t+1, 2t+1, 3t+1), t \in [0,1]$$

ולכן:

$$\int_C \omega d\underline{x} = \int_0^1 (t+1, 2t+1, t+1+2t+1-1)\cdot(1,2,3)dt =$$

$$= \int_0^1 (t+1+4t+2+9t+3)dt = (\frac{14}{2}t^2 + 6t)|_0^1 = 13$$

2. קשת אחת של ציקלואידה מתאימה לקטע הפרמטר $t \in [0, 2\pi]$.
נגדיר מסילה $C = C_1 + C_2$ כאשר C_1 היא קטע על ציר ה$-x$ בין $(0,0)$ל$-(2\pi, 0)$,
ו$-C_2$ היא החלק של הציקלואידה המחבר בין שתי אותן נקודות (אך בכיוון ההפוך).
כך C היא מסילה סגורה. אם כן, ניתן להשתמש במשפט גרין.
ניקח את הצורה $-\int_\gamma ydx$, מכיוון שלאורך ציר ה$-x$ האינטגרל הזה (על C_1) מתאפס.
כלומר:

$$S = \iint_D dxdy = -\int_C ydx = -\int_{C_1} ydx - \int_{C_2} ydx = -\int_{C_2} ydx$$

ולכן:

$$S = \int_0^{2\pi} (a(1-\cos t), 0) \cdot (a(1-\cos t), a\sin t) dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 (t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t)|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$