תזכורת:

תהי A קבוצה ויהי R יחס על A. R נקרא יחס סדר, אם הוא רפלקסיבי, אנטי־סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמאות בסיסיות: היחס "קטן־שווה" על קבוצה של מספרים ממשיים, היחס "מחלק את" על קבוצה של מספרים טבעיים, יחס ההכלה על קבוצה של קבוצות.

יחס סדר נקרא מלא, אם לכל שני איברים יש זוג ביחס, כלומר לכל $a, b \in A$ מתקיים: $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$. היחס "קטן־שווה" הוא מלא, "מחלק את" ויחס ההכלה לא בהכרח.

מינוחים וסימונים:

יחס סדר נקרא גם יחס סדר חלקי. אם A קבוצה ו־R יחס סדר על A, נאמר ש־(A, R) קס"ח (=קבוצה סדורה חלקית). אם R יחס סדר מלא, נאמר ש־(A, R) קס"מ (=קבוצה סדורה באופן מלא).

אם כן, כשליחס יש סימון מיוחד משלו, נוכל לרשום את הסימון הזה במקום R; למשל: $(\mathbb{R}, \leq)$ – המספרים הממשיים עם היחס "קטן־שווה", $(\mathbb{N}, |)$ – הטבעיים עם היחס "מחלק את", $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ – יחס ההכלה, $(\mathbb{C}, \leq_{lex})$ – המרוכבים עם היחס המילוני...

יתרה מזאת, מכיוון ש"קטן־שווה" הוא הדוגמה הבסיסית ביותר ליחס סדר, יש שמסמנים כל יחס סדר בסימון של $\leq$. כלומר, אם אנחנו רואים משפט שמתחיל ב"$(A, \leq)$ קס"ח..." זה לא אומר שזה היחס "קטן־שווה" האורגינל, אלא סתם יחס סדר על A...

הערה:

מה עם היחס "קטן־ממש"? לכל $a,b\in\mathbb{R}$, $(a,b)\in R \iff a<b$.

מצד אחד, בהגדרות שלנו, זהו לא יחס סדר (לא רפלקסיבי, אפילו אנטי־רפלקסיבי). מצד שני, יש בו מובן מסוים של סדר...

כדי לטפל במקרים האלה, אפשר להגדיר תכונה של יחסים, אנטי־סימטריות חזקה: לכל $a,b\in A$, $(a,b)\in R\rightarrow (b,a)\notin R$.

<u>דיאגרמת הסה:</u>

דיאגרמת הסה היא דרך נוחה יחסית להציג ויזואלית יחס סדר. A קבוצה, R יחס סדר על A.

אנחנו רושמים את האיברים של A, לפי הכללים הבאים:

1. אם $(a,b)\in R$, אנחנו נרשום את b מעל a, ונמתח ביניהם קו.
2. עם זאת, אם $(a,b),(b,c)\in R$, אז $(a,c)\in R$ למה R טרנזיטיבי; במצב כזה, לא צריך למתוח קו "ישיר" מ־a ל־c, ה"מסלול" שעובר דרך b מספיק לנו.

כדי להתחיל לצייר, נתחיל מהאיברים ה"קטנים" ונתקדם כלפי מעלה.

דוגמאות:

א. היחס "קטן־שווה" על הקבוצה: $\{1,2,3,4,5\}$: (ו $a\leq$ $\iff (a,b)\in R$

b):

$$\begin{array}{c}
5\\
|\\
4\\
|\\
3\\
|\\
2\\
|\\
1
\end{array}$$

ב. היחס "מחלק את" על הקבוצה: $\{2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$: ($(a,b)\in R \iff a|b$):

$$\begin{array}{ccc}
 & & 48\\
 & \iddots & |\\
16 & & 24\\
| & \iddots & |\\
8 & & 12\\
| & \iddots & |\\
4 & & 6\\
| & \iddots & |\\
2 & & 3
\end{array}$$

ג. יחס ההכלה על הקבוצה: $P\left(\{1,2,3\}\right)$:ו($(A,B)\in R \iff A\subseteq B$):

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \{1,2,3\} & & \\
 & \iddots & | & \ddots & \\
\{1,2\} & & \{1,3\} & & \{2,3\} \\
| & \times & & \times & | \\
\{1\} & & \{2\} & & \{3\} \\
 & \ddots & | & \iddots & \\
 & & \emptyset & &
\end{array}
$$

ד. יחס ההכלה על הקבוצה: $P\left(\{1,2,3\}\right)\setminus\{\{1,2,3\}\}$:

$$
\begin{array}{ccccc}
\{1,2\} & & \{1,3\} & & \{2,3\} \\
| & \times & & \times & | \\
\{1\} & & \{2\} & & \{3\} \\
 & \ddots & | & \iddots & \\
 & & \emptyset & &
\end{array}
$$

ה. יחס ההכלה על הקבוצה $P\left(\{1,2,3\}\right) \setminus \left\{\{1,2,3\},\emptyset\right\}$:

$$
\begin{array}{ccccc}
\{1,2\} & & \{1,3\} & & \{2,3\} \\
| & \text{X} & & \text{X} & | \\
\{1\} & & \{2\} & & \{3\}
\end{array}
$$

נשים לב: יחס סדר הוא מלא אם ורק אם דיאגרמת הסה היא קו אחד.
במילים אחרות, אם יש שני איברים באותו "מפלס", היחס לא מלא.

<u>איברים מינימליים ומקסימליים:</u>

יהיו A קבוצה ו־R יחס סדר על A.

1. איבר $a \in A$ נקרא **מינימלי**, אם לא קיים $b \neq a$ כך ש: $(b,a) \in R$.

בדיאגרמה: איבר הוא מינימלי אם אין מישהו מתחתיו.

בדוגמאות שלנו – בדוגמה א', 1 הוא מינימלי. בדוגמה ב', $2,3$ מינימליים.

בדוגמאות ג',ד', $\emptyset$ מינימלית. בדוגמה ה', $\{3\},\{2\},\{1\}$ מינימליים.

<u>הערות:</u>

א. יכול להיות יותר מאיבר מינימלי אחד. מצד שני, יכול להיות שאין מינימליים בכלל, למשל בקבוצה: $(\mathbb{R},\leq)$ – לכל מספר ממשי יש מישהו שקטן ממנו.

ב. בקבוצה סופית תמיד יש איבר מינימלי.

ג. אם יש יותר מאיבר מינימלי אחד, היחס אינו מלא (המינימליים נמצאים באותו מפלס...).

2. איבר $a \in A$ נקרא **קטן ביותר**, אם לכל $b \in A$, $(a,b) \in R$. בדיאגרמה: איבר הוא קטן ביותר אם כולם נמצאים מעליו.

בדוגמאות שלנו – בדוגמה א', 1 הוא קטן ביותר. בדוגמה ב', אין איבר קטן ביותר. בדוגמאות ג',ד', $\emptyset$ היא איבר קטן ביותר. בדוגמה ה', אין איבר קטן ביותר.

<u>הערות:</u>

א. לא חייב להיות איבר קטן ביותר.

ב. איבר קטן ביותר הוא מינימלי יחיד. שאלה: האם מינימלי יחיד הוא בהכרח קטן ביותר? לא בהכרח. עם זאת, בקבוצה סופית, איבר הוא קטן ביותר אם ורק אם הוא מינימלי יחיד.

ג. אם הקבוצה סופית והיחס מלא, יש איבר קטן ביותר (כמו בדוגמה א').

3. איבר $a \in A$ נקרא **מקסימלי**, אם לא קיים $b \neq a$ כך ש: $(a,b) \in R$. בדיאגרמה: איבר הוא מקסימלי אם אין אף אחד מעליו.

בדוגמאות שלנו – בדוגמה א', 5 הוא מקסימלי. בדוגמה ב', 48 מקסימלי. בדוגמה ג', $\{1,2,3\}$ הוא מקסימלי. בדוגמאות ד',ה', $\{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}$ מקסימליים.

<u>הערות:</u>

א. יכול להיות יותר מאיבר מקסימלי אחד. מצד שני, יכול להיות שאין מקסימליים בכלל, למשל בקבוצה: $(\mathbb{R}, \leq)$ – לכל מספר ממשי יש מישהו

שגדול ממנו.

ב. בקבוצה סופית תמיד יש איבר מקסימלי.

ג. אם יש יותר מאיבר מקסימלי אחד, היחס אינו מלא (המקסימליים נמצאים באותו מפלס...).

4. איבר $a \in A$ נקרא **גדול ביותר**, אם לכל $b \in A$, $(b,a) \in R$. בדיאגרמה: איבר הוא גדול ביותר אם כולם נמצאים מתחתיו.

בדוגמאות שלנו – בדוגמה א', 5 גדול ביותר. בדוגמה ב', 48 גדול ביותר. בדוגמה ג', $\{1,2,3\}$ גדול ביותר. בדוגמאות ד',ה' אין איבר גדול ביותר.

<u>הערות:</u>

א. לא חייב להיות איבר גדול ביותר.

ב. איבר גדול ביותר הוא מקסימלי יחיד. שאלה: האם מקסימלי יחיד הוא בהכרח גדול ביותר? לא בהכרח. עם זאת, בקבוצה סופית, איבר הוא גדול ביותר אם ורק אם הוא מקסימלי יחיד.

ג. אם הקבוצה סופית והיחס מלא, יש איבר גדול ביותר (כמו בדוגמה א').

<u>שאלות שאפשר לשאול – ותשובות:</u>

1. האם איבר יכול להיות גם מינימלי וגם מקסימלי? ראשית, אם הוא האיבר היחיד בקבוצה, הוא בוודאי גם מינימלי וגם מקסימלי. חוץ מזה, אם איבר לא מתייחס לאף אחד מהאיברים האחרים, הוא יהיה גם מינימלי וגם מקסימלי. למשל, היחס "מחלק את" על הקבוצה: $\{2,3,4,6,7,8,12,16,24,48\}$: ($(a,b) \in$

$R \iff a|b$):

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 48 & & \\
 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & | & & \\
16 & & 24 & & \\
| & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & | & & \\
8 & & 12 & 7 & \\
| & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & | & & \\
4 & & 6 & & \\
| & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & | & & \\
2 & & 3 & &
\end{array}
$$

7 הוא גם מינימלי (אף אחד לא מחלק את 7, אין מתחתיו אף אחד בדיאגרמה) וגם מקסימלי (7 לא מחלק את אף אחד, אין מעליו אף אחד בדיאגרמה).

2. האם איבר יכול להיות גם קטן ביותר וגם גדול ביותר? זה קורה רק כשהאיבר הוא האיבר היחיד בקבוצה.

3. נענה על שאלה שכבר שאלנו – איבר מינימלי יחיד הוא לא בהכרח קטן ביותר, איבר מקסימלי יחיד הוא לא בהכרח גדול ביותר. נתבונן בדוגמה הבאה. על הקבוצה $\mathbb{Z} \cup \left\{\frac{3}{5}\right\}$ נגדיר את היחס הבא:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x \leq y\} \cup \left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$$

R יחס סדר. איך נראית הדיאגרמה?

$$\begin{array}{cc}
\vdots & \\
1 & \\
| & \\
0 & \frac{3}{5} \\
| & \\
-1 & \\
\vdots &
\end{array}$$

$\frac{3}{5}$ הוא מינימלי יחיד ומקסימלי יחיד, אך הוא לא קטן ביותר ולא גדול ביותר.
לא קיים $b \neq \frac{3}{5}$ כך ש: $\left(\frac{3}{5}, b\right) \in R$, לכן $\frac{3}{5}$ מקסימלי...

4. ביחס סדר מלא, איבר הוא מינימלי אם ורק אם הוא קטן ביותר. איבר הוא מקסימלי אם ורק אם הוא גדול ביותר.

אכן, תהי A קבוצה ו־R יחס סדר מלא על A. יהי $a \in A$ איבר מינימלי, נראה שהוא אכן קטן ביותר. לפי ההגדרה, צריך להראות שלכל $b \in A$, $(a,b) \in R$. לכל $b \neq a$, מכיוון שהיחס מלא, $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$. כעת, a מינימלי, ולפי ההגדרה של איבר מינימלי: $(b,a) \notin R$. מכאן, $(a,b) \in R$, כמו שרצינו (ומכיוון שהיחס רפלקסיבי, $(a,a) \in R$).

<u>חסמים:</u>

תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר על A. תהי $B \subseteq A$. איבר $x \in A$ נקרא **חסם מלעיל** של B, אם לכל $b \in B$, $(b,x) \in R$. אינטואיטיבית, x חסם מלעיל של B אם הוא גדול יותר מכל האיברים של B (בדיאגרמה - נמצא מעליהם). חסם מלעיל נקרא גם חסם מלמעלה.

למשל, $A=\mathbb{R}$ עם היחס "קטן־שווה". נתבונן ב: $B=(-1,2)$ (כל המספרים בין -1 לבין 2, לא כולל הקצוות). $3\in A$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה, כי לכל $b\in B$, $b\leq 3$. גם $x=2$ הוא חסם מלעיל. תכלס, כל מספר שגדול או שווה ל־2 הוא חסם מלעיל...

נשים לב ש־$x=2$ הוא החסם מלעיל הכי קטן, הכי "קרוב" לקבוצה B עצמה. נדון בכך עוד מעט.

דוגמה נוספת: $A=\mathbb{N}$ עם היחס "מחלק את", ונתבונן ב: $B=\{3,4,5,6,8\}$. $x\in\mathbb{N}$ הוא חסם מלעיל של B, אם לכל $b\in B$, $(b,x)\in R$. היחס הוא "מחלק את", ולכן $x\in\mathbb{N}$ הוא חסם מלעיל אם כל המספרים $3,4,5,6,8$ מחלקים אותו. למשל, $2880,240,480$ הם חסמי מלעיל. מי חסם המלעיל הכי קטן? 120.

דוגמה נוספת: $A=P(\mathbb{R})$ עם יחס ההכלה, $B=\{\{1\},\{2\},\{3\},\ldots\}=\{\{n\}\,|n\in\mathbb{N}\}$. $X\in A$ היא חסם מלעיל של B, אם היא מכילה את כל איברי B. למשל $\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$. מי החסם מלעיל הכי קטן? $\mathbb{N}$.

באופן דומה, תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר על A. תהי $B\subseteq A$. איבר $x\in A$ נקרא **חסם מלרע** של B, אם לכל $b\in B$, $(x,b)\in R$.

אינטואיטיבית, x חסם מלרע של B אם הוא קטן יותר מכל האיברים של B (בדיאגרמה – נמצא מתחת להם). חסם מלרע נקרא גם חסם מלמטה.

בדוגמאות שלנו –

$A=\mathbb{R}$ עם היחס "קטן־שווה". נתבונן ב: $B=(-1,2)$, -1 הוא חסם מלרע, כל מספר שקטן ממנו גם יהיה חסם מלרע. -1 הוא החסם מלרע הגדול ביותר (הכי "קרוב" לקבוצה).

$A=\mathbb{N}$ עם היחס "מחלק את", ונתבונן ב: $B=\{3,4,5,6,8\}$. חסם מלרע

הוא מספר שמחלק את כל איברי הקבוצה, יש מישהו כזה: 1. $A = P(\mathbb{R})$ עם יחס ההכלה, $B = \{\{1\},\{2\},\{3\},\ldots\} = \{\{n\} | n \in \mathbb{N}\}$. חסם מלרע הוא קבוצה שמוכלת בכל איברי הקבוצה. $\emptyset$ היא החסם מלרע היחיד.

אם לקבוצה B קיים חסם מלעיל, נאמר שהיא חסומה מלעיל או חסומה מלמעלה. מצד שני, אם לקבוצה B קיים חסם מלרע נאמר שהיא חסומה מלרע או חסומה מלמטה.

אם B גם חסומה מלעיל וגם חסומה מלרע, נאמר שהיא חסומה.

למשל, $A = \mathbb{R}$ עם היחס "קטן־שווה". $B = (-1, 2)$ היא חסומה מלעיל וחסומה מלרע ולכן חסומה. $\mathbb{N}$ היא חסומה מלרע (למשל, $1 \leq n$ לכל $n \in \mathbb{N}$), אך לא חסומה מלעיל (אין מספר ממשי שגדול יותר מכל הטבעיים). מצד שני, $C = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ חסומה מלעיל (למשל, $x \leq \frac{1}{2}$ לכל $x \in C$) אך לא חסומה מלרע (אין מספר ממשי שקטן יותר מכל השלמים השליליים). $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, למשל, לא חסומות לא מלעיל ולא מלרע.

ננסח פורמלית את המושג של חסם מלעיל הכי קטן (וחסם מלרע הכי גדול).

<u>חסם עליון וחסם תחתון:</u>

תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר על A. תהי $B \subseteq A$. האיבר הקטן ביותר (אם קיים כזה) בקבוצת החסמים מלמעלה של B (כלומר, החסם מלמעלה הכי קטן) נקרא החסם העליון של B, ומסומן: $\sup B$ (סופרימום).

למשל, בדוגמאות שלנו –

$A = \mathbb{R}$ עם היחס "קטן־שווה". נתבונן ב: $B = (-1, 2)$. החסם מלעיל הכי קטן הוא 2, ולכן: $\sup B = 2$.

$A = \mathbb{N}$ עם היחס "מחלק את", ונתבונן ב: $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$. החסם מלעיל הכי קטן הוא 120, ולכן: $\sup B = 120$.

$A = P(\mathbb{R})$ עם יחס ההכלה, $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\} = \{\{n\} | n \in \mathbb{N}\}$.
החסם מלעיל הכי קטן הוא $\mathbb{N}$, ולכן: $\sup B = \mathbb{N}$.

<u>הערות:</u>

א. גם אם הקבוצה חסומה, לא חייב להיות לה חסם עליון. כלומר, מבין כל החסמים מלמעלה, לא חייב להיות אחד שהוא הקטן ביותר.

למשל: $A = \mathbb{Q}$ עם היחס "קטן־שווה". נתבונן בקבוצה: $B = \mathbb{Q} \cap \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ – כל הרציונליים שנמצאים בין $-\sqrt{2}$ לבין $\sqrt{2}$. כל מספר $x \in \mathbb{Q}$ ש: $\sqrt{2} < x$ הוא חסם מלעיל, אך בקבוצת הרציונליים שגדולים מ־$\sqrt{2}$ אין איבר קטן ביותר; תמיד אפשר למצוא רציונלי קטן יותר שעדיין גדול מ־$\sqrt{2}$. זאת, כי $\sqrt{2}$ הוא אי־רציונלי, ולכן יש לו פיתוח עשרוני אינסופי לא מחזורי:

$$\sqrt{2} = 1.41421...$$

ואפשר להתקרב אליו עוד ועוד עם רציונליים:

$$1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, \ldots$$

בכל פעם לדייק בעוד ספרה אחרי הנקודה.

ב־$\mathbb{R}$, לכל קבוצה (לא ריקה) חסומה יש חסם עליון – אקסיומת השלמות של $\mathbb{R}$.

ב. באופן כללי, אם $A = \mathbb{N}$ עם היחס "מחלק את", החסם העליון של B הוא הכפולה המשותפת המינימלית של איברי B (המספר הכי קטן שמתחלק בכולם), lcm. למשל:

$$lcm\left(3, 4, 5, 6, 8\right) = 120 \Longrightarrow \sup\left\{3, 4, 5, 6, 8\right\} = 120$$

בקבוצה של קבוצות, החסם העליון הוא האיחוד של כל הקבוצות. למשל: $A = P(\mathbb{R})$ עם יחס ההכלה, $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\} = \{\{n\} | n \in \mathbb{N}\}$, אז:

$$\sup B = \cup B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$$

זאת, כמובן, בהנחה שהאיחוד אכן שייך ל־A...

ג. אם $\sup B \in B$, אנחנו קוראים לו מקסימום ואפשר לסמן: $\max B$.
למשל, $A = \mathbb{R}$ עם היחס "קטן־שווה". נתבונן ב: $B = [-1, 2]$. $\sup B = 2$ וגם $2 \in B$, ולכן נאמר ש־2 הוא המקסימום של B ונסמן: $\max B = 2$.
בעצם, כשהחסם העליון שייך לקבוצה, הוא איבר גדול ביותר בקבוצה. (ואפילו אפשר לומר שחסם מלעיל ששייך לקבוצה, גם בלי לומר מפורשות שהוא חסם עליון, הוא מקסימום).

באופן דומה, נוכל להגדיר חסם תחתון. תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר על A. תהי $B \subseteq A$. האיבר הגדול ביותר (אם קיים כזה) בקבוצת חסמי המלרע של B נקרא החסם התחתון של B ומסומן $\inf B$ (אינפימום).
למשל, בדוגמאות שלנו –
$A = \mathbb{R}$ עם היחס "קטן־שווה". נתבונן ב: $B = (-1, 2)$. החסם מלרע הכי גדול הוא -1, ולכן: $\inf B = -1$.
$A = \mathbb{N}$ עם היחס "מחלק את", ונתבונן ב: $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$. החסם מלרע הכי גדול הוא 1, ולכן: $\inf B = 1$.
$A = P(\mathbb{R})$ עם יחס ההכלה, $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\} = \{\{n\} | n \in \mathbb{N}\}$.
החסם מלרע הכי גדול הוא $\emptyset$, ולכן: $\inf B = \emptyset$.

הערות:

א. גם אם הקבוצה חסומה, לא חייב להיות לה חסם תחתון. כלומר, מבין כל החסמים מלמטה, לא חייב להיות אחד שהוא הגדול ביותר.

למשל: $A = \mathbb{Q}$ עם היחס "קטן־שווה". נתבונן בקבוצה: $B = \mathbb{Q} \cap \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ – כל הרציונליים שנמצאים בין $-\sqrt{2}$ לבין $\sqrt{2}$. כל מספר $x \in \mathbb{Q}$ ש: $x < -\sqrt{2}$ הוא חסם מלרע, אך בקבוצת הרציונליים שקטנים מ־$-\sqrt{2}$ אין איבר גדול ביותר; תמיד אפשר למצוא רציונלי גדול יותר שעדיין קטן מ־$-\sqrt{2}$. זאת, כי $-\sqrt{2}$ הוא אי־רציונלי, ולכן יש לו פיתוח עשרוני אינסופי לא מחזורי:

$$-\sqrt{2} = -1.41421...$$

ואפשר להתקרב אליו עוד ועוד עם רציונליים:

$$-1.5, -1.42, -1.415, -1.4143, \ldots$$

בכל פעם לדייק בעוד ספרה אחרי הנקודה.

ב. באופן כללי, אם $A = \mathbb{N}$ עם היחס "מחלק את", החסם התחתון של B הוא המחלק המשותף המקסימלי של איברי B (המספר הכי גדול שמחלק את כולם), gcd. למשל:

$$gcd\left(3,4,5,6,8\right) = 1 \Longrightarrow \inf\left\{3,4,5,6,8\right\} = 1$$

בקבוצה של קבוצות, החסם התחתון הוא החיתוך של כל הקבוצות. למשל: $A = P\left(\mathbb{R}\right)$ עם יחס ההכלה, $B = \left\{\left\{1\right\}, \left\{2\right\}, \left\{3\right\}, \ldots\right\} = \left\{\left\{n\right\} | n \in \mathbb{N}\right\}$, אז:

$$\inf B = \cap B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{n\right\} = \emptyset$$

זאת, כמובן, בהנחה שהחיתוך אכן שייך ל־A...

ג. אם $\inf B \in B$, אנחנו קוראים לו מינימום ואפשר לסמן: $\min B$. למשל, $A = \mathbb{R}$ עם היחס "קטן־שווה". נתבונן ב: $B = [-1, 2]$. $\inf B = -1$ וגם $-1 \in B$, ולכן נאמר ש־-1 הוא המינימום של B ונסמן: $\min B = -1$.

בעצם, כשהחסם התחתון שייך לקבוצה, הוא איבר קטן ביותר בקבוצה. (ואפילו אפשר לומר שחסם מלרע ששייך לקבוצה, גם בלי לומר מפורשות שהוא חסם תחתון, הוא מינימום).