סיכום משפטים וטענות עיקריות בקורס אלגברה לינארית 2

<u>פרק 1</u>

1. $\lambda=0$ ע״ע אס״ם המטריצה אינה הפיכה- סינגולרית
2. אם A הפיכה ו-λ ע״ע שלה אזי $\frac{1}{\lambda}$ ע״ע של A^{-1}.
3. λ ע״ע אס״ם $\det(A-\lambda*I)=0$.
4. הע״ע של מטריצה משולשית הם אברי האלכסון שלה.
5. אם כל השורות של מטריצה מסתכמות לסקלר מסוים, אזי הוא ע״ע שלה.
6. $P_A(x) = \det(xI - A)$
7. המשפט היסודי של האלגברה- מעל הקומפלקסים כל פולינום מל״ל.
8. מסקנה- מעל הקומפלקסים ישנם n ע״ע (כולל ריבוי).
9. למטריצות דומות יש אותו/ה
   - דטרמיננטה
   - פ״א
   - פ״מ
   - ע״ע.
   - צורת ז׳ורדן
   - ר״ג ו ר״א
   - **אך לא אותם ו״ע.**
10. מטריצה A לכסינה אס״ם היא דומה למטריצה אלכסונית D.
11. אם A לכסינה ו D אלכסונית אז לכל k טבעי מתקיים $A^k = PD^KP^{-1}$
12. המטריצה $P^{-1}AP$ אלכסונית אס״ם עמודות P הן ו״ע של A.
13. מטריצה ריבועית היא לכסינה אס״ם יש בסיס המורכב מו״ע שלה.
14. הע״ע מופיעים באלכסון המטריצה האלכסונית המתקבלת לפי סדר הו״ע.
15. $V_\lambda = V_\lambda(A) := \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$
16. $P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$
    - $a_0 = (-1)^n det(A)$
    - $a_{n-1} = -tr(A)$
    - $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
    - הפ״א הוא מתוקן ומעלתו n
17. אם α שורש של פולינום $f(x)$ אזי $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ עבור $g(x)$ כלשהו.
18. ריבוי אלגברי- הוא החזקה הגבוהה ביותר של ע״ע בפולינום האופייני.
19. ריבוי גיאומטרי מוגדר ע״י- $\dim(V_\lambda)$. ($n-\text{rank}(A-\lambda I)$)
20. ר״ג תמיד קטן שווה מר״א

הערה: אם לכל ע״ע λ מתקיים שוויון וכן הפ״א מל״ל אס״ם המטריצה לכסינה.

21. ו״ע של ע״ע שונים הם בת״ל.
22. אם למטריצה מסדר nxn יש n ע״ע שונים אז היא לכסינה. **גרירה חד כיוונית**

23. $A \in F^{nxn}$ דומה למטריצה משולשית עליונה אס"ם הפ"א מל"ל.
24. משפט קיילי המילטון- $P_A(A) = 0$
25. פולינום מינימלי- הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית שמאפס את A.
26. הפולינום המינימלי קיים ויחיד.
27. $m_A(x)$ מחלק כל פולינום מאפס של A
28. מסקנה מהאמור לעיל ומקיילי המילטון, $m_A(x)|P_A(x)|(m_A(x))^n$
29. מסקנה- לפ"א ולפ"מ אותם גורמים אי פריקים.
30. עבור כל מטריצה אלכסונית בלוקים המורכבת ממטריצות A_i יתקיים $P_A(x) = \prod_{i=1}^{k} P_{A_i}$
31. $m_A(x) = l.c.m\left(m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \dots, m_{A_n}(x)\right)$
32. U יקרא תת מרחב אינווריאנטי (תחת T) אם הוא ת"מ של v כך $\forall: u \in U$ $T(u) \in U$.
33. $K_\lambda = K_\lambda(A) = ker(T-\lambda I)^n = \{v \in V \mid (T-\lambda I)^n v\} = \vec{0}$
34. $V_\lambda \subseteq K_\lambda$
35. מסלול מאורך m מוגדר להיות $\{T^{m-1}(v), \dots, T^2 v, Tv, v\}$ כאשר $T^m v = \vec{0}$ ובנוסף $T^{m-1} v \neq \vec{0}$
36. אברי מסלול הם בת"ל
37. K_λ אינווריאנטי תחת T.
38. לכל פולינום f(x) T מתחלף עם f(T)
39. אם $\mu \neq \lambda$ ע"ע אזי $K_\lambda \cap K_\mu = \{0\}$
40. יהי λ ע"ע של אופרטור T נסמן $I_\lambda = Im(T-\lambda I)^n$ אזי
- I_λ אינווריאנטי
- $V = K_\lambda \oplus I_\lambda$
41. יהי T אופרטור נילפוטנטי אזי $P_T(x) = x^n$, כמו כן 0 הוא הע"ע היחיד של T.
42. ר"א של ע"ע λ= $dim(K_\lambda)$
43. משפט הפירוק הספקטרלי: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ע"ע שונים של T אזי $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_k}$
44. Eמסלול מאורך m אס"ם $[T]_E = \mathfrak{J}_m(0)$
45. אם צורת ז'ורדן קיימת אזי היא יחידה.
46. A לכסינה אס"ם לכל ע"ע λ חזקת x-λ בפולינום המינימלי הוא 1.
47. "טריקים" למציאת צורות ז'ורדן של מטריצות:
   - ר"ג של ע"ע הוא מס' הבלוקים המתאימים לו בצורת ז'ורדן
   - הר"א של λ בפ"א הוא סכום הגדלים של הבלוקים המתאימים לλ.
   - ה m הגדול ביותר כך ש $\mathfrak{J}_m(\lambda)$ מופיע בהצגתA הוא החזקה של x-λ ב$m_A(x)$.
48. מטריצות דומות אס"ם יש להן את אותה צורת ז'ורדן.

פרק 2

מכפלה פנימית על מרחב ווקטורי מעל הממשיים או הקומפלקסים קיימת אם מתקיים:

- ליניאריות ברכיב הראשון

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u\rangle = \alpha\langle v_1, u\rangle + \beta\langle v_2, u\rangle$$

- הרמיטיות

$$\overline{\langle v, u\rangle} = \langle u, v\rangle$$

- אי שליליות. $0 \le \langle v, v\rangle$
- $v = \vec{0} \leftrightarrow 0 = \langle v, v\rangle$

49. מטריצת גראהם מוגדרת ע"י

$$G_{v1,\dots,vk} := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_k\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_k, v_1\rangle & \cdots & \langle v_k, v_k\rangle \end{pmatrix},$$

50. עבור B בסיס: $\langle u, v\rangle \ge [u]_B^t G_B \overline{[v]_B}$
51. מכפלות פנימיות שמתלכדות על אותו בסיס הן זהות
52. לכל זוג בסיסים B, C $G_B = ([I]_C^B)^t G_C \overline{[I]_C^B}$
53. נורמה היא פונקציה מהמרחב הוקטורי אל שדה הממשיים המקיימת
    - $0 \le \|v\|$ ו $v = \vec{0} \leftrightarrow 0 = \|v\|$
    - $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
    - $\|u\| + \|v\| \ge \|u + v\|$
54. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
55. $u, v \in V$ מאונכים זה לזה אם $\langle u, v\rangle = 0$
56. תכונות:
    - $v_1 \perp v_2 \Rightarrow v_2 \perp v_1$
    - $\vec{0} \perp v$
    - $v_2 \perp v \Leftrightarrow \alpha v_1 \perp \beta v_2$
57. קבוצה S תקרא אורתוגונלית אם כל שני איברים שלה מאונכים.
58. קבוצה S תקרא אורתונורמלית אם כל איבריה נורמלים.
59. קבוצה אורתוגונלית שלא מכילה את וקטור האפס היא בת"ל.
60. אם $v = \sum_i \alpha_i v_i$ אזי $\alpha_i = \langle v, v_i\rangle$
61. משפט פיתגורס: עבור בסיס אונ' $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ווקטור v שהוא צ"ל של אברי הבסיס יתקיים $\|v\|^2 = [v]_B^t \overline{[v]_B} = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$.
62. מטריצה אוניטרית אם $A^* = A^{-1}$
63. A אוניטרית אס"ם A^t אוניטרית

64. מטריצה אוניטרית אס"ם שורותיה בסיס אורתונומלי במ"פ אס"ם עמודותיה בסיס אורתונורמלי במ"פ סטנדרטית.
65. מטריצת מעבר בין בסיסים אורתונורמלים היא אוניטרית.
66. $S^{\perp} = \{v \in V \mid \forall u \in S, \langle v, u\rangle = 0\}$ הוא המרחב הניצב לקבוצה.
67. $S^{\perp} = span(S)^{\perp}$
68. היטל של וקטור לתת־מרחב W עם בסיס אורתוגונלי $B = w_1, \dots, w_k$

$$\pi_B(v) \coloneqq \frac{\langle v, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \cdots + \frac{\langle v, w_k\rangle}{\|w_k\|^2} w_k$$

69. ההיטל שייך לתת המרחב כיוון שהוא צ"ל של אברי הבסיס B
70. $\pi_B(v) = v \Leftrightarrow v \in W$
71. $v - \pi_B(v) \in W^{\perp}$
72. תהליך גראם-שמידט: יהי בסיס $\mathrm{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ על מנת למצוא בסיס אורתוגונלי $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ נבצע את ההליך הבא:

(1) $w_1 = v_1$
(2) $w_2 = v_2 - \pi_{\{w_1\}}(v_2)$
(3) $w_3 = v_3 - \pi_{\{w_1, w_2\}}(v_3)$
....
(n) $w_n = v_n - \pi_{\{w_1, \dots, w_{n-1}\}}(v_n)$

*על מנת לקבל בסיס אורתונורמלי יש צורך לחלק כל וקטור מB' בנורמה שלו- $w_i^{\circ} = \frac{1}{\|w_i\|} w_i$.

73. אי שוויון בסל: תהי $\{w_1, \dots, w_m\}$ קבוצה אורתונורמלית אזי:

(1) $\forall v \in V: \quad \|v\|^2 \geq |\langle v, w_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, w_m\rangle|^2$

(2) $\|v\|^2 = |\langle v, w_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, w_m\rangle|^2 \leftrightarrow v \in span\{\{w_1, \dots, w_m\}$

74. אי שוויון קושי-שוורץ: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, שוויון יתקיים אס"ם הם ת"ל
75. משפט הפירוק הניצב: $V = W \oplus W^{\perp}$
76. ההיטל $\pi_B(v)$ על ת"מ W=span(B) אינו תלוי בבחירה של B.
77. אם $v \perp u$ אזי $\|v \pm u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
78. משפט ההצגה של ריס: לכל פונקציונל לינארי φ יש וקטור יחיד u כך שיתקיים $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$
79. ההעתקה הצמודה: תהי $T: V \to W$ בהעתקה לינארית בין ממ"פ מעל אותו שדה. $T^*: W \to V$ היא ההעתקה היחידה המקיימת

$\forall v \in V, w \in W: \langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$

80. עבור בסיסים אורתונורמלים E, F יתקיים $[T^*]_E^F = ([T]_F^E)^*$
81. $T^{**} = T \qquad (ST)^* = T^*S^* \qquad (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^* \qquad (T+S)^* = T^* + S^*$

82. אופרטור $T : V \to V$ נקרא:

(א) נורמלי אם $TT^* = T^*T$

(ב) צמוד לעצמו אם $T^* = T$

(ג) אוניטרי אם $T^\circ T^* = I$

*ההגדרה שקולה גם עבור מטריצות.

83. אופרטור T נורמלי/אוניטרי/צמוד לעצמו אמ"ם $[T]_B$ עבור B אורתונורמלי היא נורמלית/אוניטרית/צמודה לעצמה.
84. יהי $T : V \to V$ אופרטור נורמלי, אזי $\|T(v)\| = \|T^*(v)\| \quad \forall v \in V$
85. הזהות הפולרית מעל $\mathbb{C}$ (עבור $\mathbb{R}$ יש להציב i=0):

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) + \frac{i}{2}(\|v+iw\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

86. התכונות הבאות שקולות עבור אופרטור T
   - אוניטרי
   - שומר מכפלה פנימית: $\langle v, v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle$
   - שומר נורמה: $\|v\| = \|T(v)\|$
   - שומר מרחקים: $\|v-u\| = \|T(v-u)\|$
87. זווית בממ"פ מעל הממשיים היא הסקלר היחיד $0 \le \theta \le \pi$ שמקיים-

$$cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

*אם T נורמלי אזי T, T^* משפיעים באותו אופן על הזווית.
* אופרטור אוניטרי "שומר זווית"- $\measuredangle(u, v) = \measuredangle(T(u), T(v))$

פרק 3

88. המכפלה הפנימית הסטנדרטית מעל הממשיים מקיימת לכל A ריבועית:

(א)$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$

(ב) אם A נורמלית אזי, $\|Av\| = \|A^*v\|$

(ג) אם A אוניטרית אזי, $\|Av\| = \|v\|$

89. אופרטור T ניתן לשילוש אוניטרי אמ"ם הפ"א של המטריצה המייצגת מל"ל.
*בדומה עבור מטריצות.
90. אם השדה הוא C אזי כל מטריצה/ אופרטור ניתנים לשילוש אוניטרי.
91. על מנת לשלש אוניטרית בפועל יש לשלש באופן רגיל ואח"כ להפעיל את תהליך גראהם שמידט על הבסיס המשלש.

92. מטריצה משולשית ונורמלית היא אלכסונית
93. כל אופרטור נורמלי עם פ״א של המטריצה המייצגת מל״ל הוא לכסין אוניטרית.
94. כל מטריצה נורמלית עם פ״א מל״ל היא לכסינה אוניטרית.
95. על מנת ללכסן אוניטרית בפועל יש ללכסן באופן רגיל ואח״כ להפעיל את תהליך גראהם שמידט על הבסיס המלכסן. **יש לבצע גראם שמידט על כל מרחב עצמי בנפרד.**
96. לכל A סימטרית יש P אורתוגונלית כך ש$\mathrm{D} = P^{-1}AP = P^tAP$ אלכסונית.
97. כל אופרטור צמוד לעצמו הוא לכסין אורתוגונלית.
98. יהי אופרטור T, כך שהפ״א מל״ל אזי- T נורמלי אס״ם T צמוד לעצמו.
99. תהי A מטריצה ממשית, כך שהפ״א מל״ל אזי- A נורמלית אס״ם A סימטרית.

__פרק 4__

.100 המרחב הדואלי לV מוגדר בצורה הבאה- $V^* = \{\varphi: V \to F\}$

.101 $dim(V^*) = dim(V)$ וזה בגלל ש$\mathrm{V} \cong V^*$

.102 יהי $\mathrm{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס כלשהו של V הבסיס הדואלי B^* מוגדר ע״י-
$\mathrm{B}^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ כאשר $\varphi_i(v_j) := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

.103 $[\varphi]_{B^*} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$ $\quad \varphi = \varphi(v_1)\varphi_1 + \ldots + \varphi(v_n)\varphi_n$

.104 $[\mathrm{v}]_B = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_n(v) \end{pmatrix}$

.105 יהיו C,B בסיסים, ויהיו B^*, C^* הבסיסים הדואלים, אזי מתקיים-
$[I]_{C^*}^{B^*} = ([I]_B^C)^t$

.106 V^{**} הוא אוסף כל הפונקציונלים מהמרחב הדואלי לשדה F.

.107 $\mathrm{V} \cong V^* \cong V^{**}$

.108 נגדיר $\mathrm{T}: \mathrm{v}^{**} \to \mathrm{v}$ על ידי הנוסחא- $\mathrm{T}(\mathrm{v}) = \hat{\mathrm{v}}$ כך ש- $\hat{\mathrm{v}}(\varphi) := \varphi(v)$ כמו כן $\hat{\mathrm{v}} \epsilon V^{**}$

.109 $\hat{\mathrm{v}} \epsilon V^{**}$ ו T איזומורפיזם של מרחבים וקטורים.

.110 כל בסיס של V^* הוא דואלי לאיזשהו בסיס של V.

.111 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset V^*$ בסיס אס״ם $\nexists \mathrm{v} \neq 0 : \varphi_1(\mathrm{v}) = \ldots = \varphi_n(\mathrm{v})$

הסיכום נעשה בעזרת ההרצאות של פרופ׳ קוניאבסקי, וללא בדיקתו.

ייתכנו טעויות