תירגול 2 - חקירת פונקציות

2 במרץ 2014

חקירת פונקציה מורכבת מהסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה
2. זוגיות/אי זוגיות
3. חיתוך עם הצירים
4. תחומי עליה/ירידה ונקודות קיצון
5. קעירות/קמירות ונקודות פיתול
6. אסימפטוטות
7. התנהגות הפונקציה ב $\pm\infty$
8. שרטוט הפונקציה

דוגמא מספר 1 - $f(x) = x^2 - 6x + 5$

תחום הגדרה

הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה. תחום ההגדרה של $f(x)$ היא A - אוסף כל הנקודות בהם $f(x)$ מוגדרת
דוגמא: תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא כל הישר $\mathbb{R}$

זוגיות/אי זוגיות

הגדרה: $f(x)$ תקרא זוגית אם $f(x) = f(-x)$
הגדרה: $f(x)$ תקרא זאי וגית אם $f(x) = -f(-x)$
דוגמא: $f(-x) = x^2 + 6x + 5 \neq \pm f(x)$ ולכן $f(x)$ אינה זוגית ואינה אי זוגית

חיתוך עם הצירים

החיתוך עם ציר x הן הנקודות $(1,0).(5.0)$
החיתוך עם ציר y היא הנקודה $(0,5)$

נקודות קיצון ותחומי עליה/ירידה

הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה. נאמר ש $f(x)$ עולה (יורדת) בתחום U אם : $\forall x < y \in U$: $f(x) \leq f(y)$ ($\forall x < y \in U :\ f(x) \geq f(y)$)

הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה. x_0 תקרא נקודת קיצון- מקס' (או מינ') אם קיימת לה סביבה U

כך ש $\forall x \in U : f(x) \leq f(x_0)$ (או $\forall x \in U : f(x) \geq f(x_0)$).

משפט: אם $f(x)$ גזירה בנקודת קיצון x_0 אזי $f'(x_0) = 0$

מסקנה: בשביל למצוא נקודות קיצון של $f(x)$ מספיק לבדוק מתי $f'(x) = 0$ או מתי הנגזרת אינה קיימת כלל.

דוגמא - נמצא את הנקודות האפשריות לנקודות קיצון ל $f(x)$:

$f'(x) = 2x - 6$ ולכן הנקודה החשודה היחידה היא $x_0 = 3$

מקס' או מיני'

איך יודעים אם מדובר בנקודות קיצון ואם מדובר בקיצון מקס' או בקיצון מיני'?

1. בדיקת הפונצקיה עצמה- הנקודות החשודות מחלקות את הישר לקטעים. נציב בכל קטע נקודה ונבדוק מה מתקבל:
   למשל נציב $f(0) = 5 \, , f(3) = -4, f(6) = 5$
   ולכן 3 נקודת מיני'
   הערה: אכן מספיק לבדוק נקו' אלו - כי אם הפונצקיה היתה מחליפה מיקום (ביחס לנקודות החשודות) איפה שהוא אזי היתה נוצרת נקו' קיצון ואז היינו מגלים אותה בשלב הקודם.

2. בדיקת ערכי הנגזרת- נבדוק את סימן הנגזרת מימין ומשמאל לנקודות (מסתמך על העובדה כי : אם $f'(x) \leq 0$ בקטע I אזי הפונקציה יורדת שם. אם $f'(x) \geq 0$ אז הפונקציה עולה שם):
   $f'(0) < 0 \, , f'(4) > 0$
   ולכן משמאל ל 3 הפונקציה יורדת ומימין ל 3 היא עולה ולכן 3 נקודות מיני'
   הערה: בשלב זה מצב כי תחום העליה של f הוא $[3.\infty)$ ותחום הירידה $(-\infty, 3]$

   הערה: אכן מספיק לבדוק נקו' אלו - כי אם הנגזרת היתה מחליפה איפה שהוא את סימנה אזי היתה נוצרת נקו' קיצון ואז היינו מגלים אותה בשלב הקודם.

3. מבחן הנגזרת השניה- אם $f'(x_0) = 0$ ומתקיים $f"(x_0) > 0$ (או $f"(x) < 0$) אז x_0 נקודות מיני' (או מקס'):
   אצלנו $f"(x) = 2$ ולכן $f"(2) > 0$

תחומי קעירות/קמירות ונקודות פיתול

תהא $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אזי נאמר שהפונצקיה קעורה כלפי מעלה (כלפי מטה) ב x_0 אם קיימת סביבה U של x_0 כך שלכל $x \in U$ מתקיים:

$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ($f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$)

נאמר ש x_0 נקודת פיתול אם קיימת סביבה U ימנית בה $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ וסביבה שמאלית V בה $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ או להיפך.

משפט: $f"(x_0) > 0$ ($f"(x_0) < 0$) אז $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (כלפי מטה) ב-x_0.

משפט: הנקודות החשודות לפיתול הם הנקודות בהם $f"(x)$ אינה קיימת או ש $f"(x) = 0$

דוגמא: $f"(x) = 2$ ולכן אין נקודות פיתול והפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל הישר.

אסימטוטות

הגדרה: אסימטוטה אנכית ל $f(x)$ היא קו מהצורה $x = a$ כך שמתקיים $lim_{x\to a}|f(x)| = \infty$.

אצלנו אין אסימטוטה אנכית.

הגדרה: אסימטוטה אופקית היא ישר $l(x) = ax + b$ המקיים $lim_{x\to\infty}|f(x) - l(x)| = 0$ או $lim_{x\to-\infty}|f(x) - l(x)| = 0$

איך מוצאים ? מתקיים

$a = lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ואז

$b = lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$

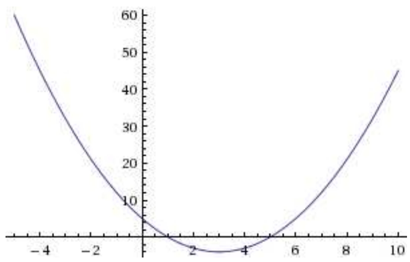
דוגמא־ אצלנו:

$a = lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+5}{x} = \infty$ ולכן אין אסימטוטה אופקית

התנהגות הפונקציה באינסוף

עבור הדוגמא שלנו $lim_{x\to\pm\infty}f(x) = \infty$

ציור הפונקציה



דוגמא 2: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

תחום הגדרה

$x > 0$ כי $\ln(x)$ לא מוגדרת עבור x־ים שליליים.

זוגיות/אי זוגיות

לא שייך בגלל תחום ההגדרה.

חיתוך עם הצירים

החיתוך עם ציר x הוא $(1, 0)$

החיתוך עם ציר y לא קיים בגלל תחום ההגדרה

נקודות קיצון ותחומי עליה/ירידה

$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ ולכן יש לה נקודה חשודה ב $x=e$.
הסימן של $f"$ נקבע ע"י $-x-2x(1-\ln(x))=-x(3-2\ln(x))$
$f(e)<0$, ולכן זוהי נקודת מקס'
תחומי העלייה של הפונקציה $(0,e)$
תחומי ירידה (e,∞)

תחומי קעירות/קמירות ונקודות פיתול

הסימן של $f"$ נקבע ע"י $-x(3-2\ln(x))$ ולכן נקודות חשודות לפיתול הם $e^{3/2}$
$f"(e)<0, f"(e^4)>0$ ולכן $e^{3/2}\approx 10$ נקודת פיתול
הפונקציה קעורה כלפי מטה ב $\left(0,e^{3/2}\right)$
הפונצקיה קעורה כלפי מעלה ב $\left(e^{3/2},\infty\right)$

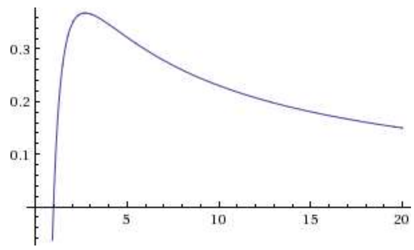
אסימטוטות

אסימטוטה אנכית ב $x=0$ כיוון ש $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$
אסימטוטה אופקית:
$a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0$
$b=lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=lim_{x\to}\frac{\ln(x)}{x}=0$
ולכן $l(x)=0$ אסימטוטה אופקית

התנהגות הפונצקיה באינסוף

עבור הדוגמא שלנו $lim_{x\to\infty}f(x)=0$

ציור הפונקציה



דוגמא 3: $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$

תחום הגדרה

תחום ההגדרה של הוא $x\neq\pm\sqrt{12}$

זוגיות/אי זוגיות

$f(-x)=\frac{-x^3}{12-x^2}=-f(x)$ ולכן $f(x)$ אי זוגית

נקודות קיצון

$f'(x) = \frac{3x^2(12-x^2)+2x^4}{(12-x^2)^2} = \frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2}$ ולכן הנקודות החשודות הן $x_0 = 0, \pm 6, \pm\sqrt{12}$ (נשים לב שהנקודות $\pm\sqrt{12} = \pm 3.464$ אינן נקודות קיצון כי אינן בתחום ההגדרה).

מקס' או מיני'

איך יודעים אם מדובר בנקודות קיצון ואם מדובר בקיצון מקס' או בקיצון מיני'?

1. בדיקת הפונצקיה עצמה- הנקודות החשודות מחלקות את הישר לקטעים. נציב בכל קטע נקודה ונבדוק מה מתקבל:
   למשל נציב $f(-7) = 9.27, f(-6) = 9, f(-4) = 16, f(-1) = -0.09, f(0) = 0, f(1) = 0.09, f(4) = -16, f(6) = -9, f(7) = -9.27$
   ולכן 0 אינה נקודת קיצון, -6 נקודת מיני ו 6 נקודות מקס'
   הערה: אכן מספיק לבדוק נקו' אלו - כי אם הפונצקיה היתה מחליפה מיקום (ביחס לנקודות החשודות) איפה שהוא אזי היתה נוצרת נקו' קיצון ואז היינו מגלים אותה בשלב הקודם.

2. בדיקת ערכי הנגזרת- נבדוק את סימן הנגזרת מימין ומשמאל לנקודות (מסתמך על העובדה כי : אם $f'(x) \leq 0$ בקטע I אזי הפונקציה יורדת שם. אם $f'(x) \geq 0$ אז הפונקציה עולה שם): נשים לב שסימן הנגזרת נקבע לפי החלק של $36 - x^2$
   $f'(-7) < 0, f'(-6) = 0, f'(-4) > 0, f'(-1) > 0, f'(0) = 0, f'(1) > 0, f'(4) > -, f'(6) = 0, f'(7) < 0$
   ולכן מימין ל -6 הפונקציה יורדת ומימין ל -6 היא עולה ולכן -6 נקודות מיני' וכו'
   הערה: אכן מספיק לבדוק נקו' אלו - כי אם הנגזרת היתה מחליפה איפה שהוא את סימנה אזי היתה נוצרת נקו' קיצון ואז היינו מגלים אותה בשלב הקודם.

3. מבחן הנגזרת השניה- אם $f'(x_0) = 0$ ומתקיים $f"(x_0) > 0$ (או $f"(x) < 0$) אז x_0 נקודות מיני' (או מקס'): הסימן של הנגזרת השניה בנקודה x הוא

$$\begin{aligned}(72x - 4x^3)(12 - x^2)^2 + 4x(12 - x^2)x^2(36 - x^2) &= x(12 - x^2)[(72 - 4x^2)(12 - x^2) + 4x^2(36 - x^2)] \\ &= x(12 - x^2)[72 \cdot 12 + 24x^2] \\ &= 24x(12 - x^2)[36 + x^2]\end{aligned}$$

$f"(6) < 0, f"(-6) > 0$
$f"(0) = 0$ ולכן לא ניתן לדעת לפי בדיקה זאת!

תחומי קעירות/קמירות ונקודות פיתול

דוגמא: $f(x) = \frac{x^3}{12-x^2}$ אזי $f'(x) = \frac{3x^2(12-x^2)+2x^4}{(12-x^2)^2} = \frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2}$ ו $f"(x) = \frac{24x(12-x^2)[36+x^2]}{(12-x^2)^4}$
הנקודות החשודות לפיתלול הם $0, \pm\sqrt{12}$ הסימן של $f"(x)$ נקבע לפי החלק $x(12 - x^2)$
נבדוק $f"(-4) > 0, f"(-1) < 0, f(0) = 0, f(1) > 0, f(4) < 0$. ומכאן מסיקים כי
בקטע $(-\infty, -\sqrt{12})$ הפונצקיה קעורה כלפי מעלה
בקטע $(-\sqrt{12}, 0)$ הפונצקיה קעורה כלפי מטה
בקטע $(0, \sqrt{12})$ הפונצקיה קעורה כלפי מעלה

בקטע $(\sqrt{12},\infty)$ הפונצקיה קעורה כלפי מטה
ובנקודה 0 יש נקודות פיתול (כי הנגזרת השניה שלילית עד אליה וחיובית ממנה)

אסימטוטות

הגדרה: אסימטוטה אנכית ל $f(x)$ היא קו מהצורה $x=a$ כך שמתקיים $lim_{x\to a}|f(x)|=\infty$.

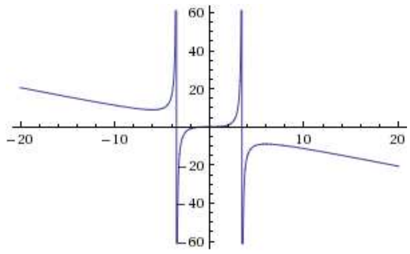
דוגמא $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$ יש 2 אסימטוטות אנכיות ב $x=\pm\sqrt{12}$
כי $lim_{x\to-\sqrt{12}^+}f(x)=lim_{x\to\sqrt{12}^+}f(x)=-\infty$
$lim_{x\to-\sqrt{12}^-}f(x)=lim_{x\to\sqrt{12}^-}f(x)=\infty$

הגדרה: אסימטוטה אופקית היא ישר $l(x)=ax+b$ המקיים $lim_{x\to\infty}|f(x)-l(x)|=0$
או $lim_{x\to-\infty}|f(x)-l(x)|=0$
מתקיים $a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ואז $b=lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$
דוגמא: $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$ נמצא אסימטוטות:
$a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(12-x^2)}=-1$
$b=lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{12-x^2}+x)=lim_{x\to\infty}(\frac{12x}{12-x^2})=0$
באותו אופן גם אסימטוטה לכיוון $x\to-\infty$ תצא אותו דבר.
ולכן $l(x)=-x$ אסימטוטה אנכית

התנהגות הפונצקיה באינסוף

עבור הדוגמא שלנו $lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{12-x^2}=-\infty, lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{12-x^2}=\infty$

ציור הפונקציה



משפטים לסיכום

1. אם $f(x)$ גזירה בנקודת קיצון x_0 אזי $f'(x_0)=0$
2. מבחן הנגזרת השניה- אם $f'(x_0)=0$ ומתקיים $f"(x_0)>0$ (או $f"(x)<0$) אז x_0 נקודות מיני' (או מקס')
3. אם $f'(x)\leq 0$ בקטע I אזי הפונקציה יורדת שם. אם $f'(x)\geq 0$ אז הפונקציה עולה שם

4. אם $f"(x_0) > 0$ ($f"(x_0) < 0$) אז $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (כלפי מטה) ב־x_0.
מסקנה: הנקודות החשודות לפיתול הם הנקודות בהם $f"(x)$ אינה קיימת או ש $f"(x) = 0$