

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 5: מערכות ייחוס מסתובבות

1. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך ℓ ומסה m בקצהו. המטוטלת ממוקמת בקו רוחב λ ונוטה בזווית θ . המהירות הזוויתית של כדור"א Ω .

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת

(הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת ביחס למערכת האינרציאלית $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ כאשר $\vec{v}' = \dot{x}\hat{e} + \dot{y}\hat{n}$ והזניחו איברים $O(\Omega^2)$. השתמשו בקרוב תנודות קטנות עבור הפוטנציאל, כך ש $\ell^2\theta^2 \approx x^2 + y^2$.)

(ב) כתבו את משוואות אוילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו בכיתה.

(ג) מצאו את התנעים הקנוניים ורשמו את ההמילטוניאן $\mathcal{H}(\Omega)$

(ד) הראו כי

$$(1) \quad \mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(0) - L\Omega \sin \lambda$$

כאשר L התנע הזוויתי. מה המשמעות של $\mathcal{H}(0)$?

(ה) הראו כי התנע הזוויתי נשמר

i. ע"י שימוש ב (1)

ii. באמצעות סוגרי פואסון

2. גוף בעל מסה m נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות v_0 . הוכיחו כי המקום בו נופל הגוף מוסט מערבה מנקודת הזריקה במרחק Δ השווה ל

$$(2) \quad \Delta = -\frac{4}{3}\Omega \cos \lambda \sqrt{8h^3/g},$$

כאשר Ω המהירות הזוויתית של כדור"א, h הגובה המקסימלי ו λ קו הרוחב בו נמצא הגוף.