

83-110 אלגברה לינארית להנדסה – מועד א' תש"ף

מרצים: דר' שפרה רייף, דר' ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות: יש לענות על כל 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.

יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.

כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. תהיינה מטריצות ריבועיות $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $C(A) = R(A)$ אזי A הפיכה.

ב. אם $C(A) \subseteq R(A)$ אזי $C(A) = R(A)$.

ג. $N(AB) \subseteq N(A)$.

2. תהי מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- א. הוכיחו שאם λ הוא ערך עצמי של A אזי λ^2 ערך עצמי של A^2 .
- ב. הוכיחו שאם $A^2 = 0$ אזי אפס הוא ערך עצמי של A , והוא הערך העצמי היחיד.
- ג. הוכיחו שאם $A^2 = 0$ וכן A לכסינה אזי $A = 0$.

3. יהי תת מרחב וקטורי \mathbb{R}^4 $W = \text{span}\{(1, 2, 1, 0), (0, 1, -2, 1), (-2, 4, 0, 2), (-2, 3, 2, 1)\}$.

א. מצאו בסיס ל W וחשבו את $\dim W$.

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי ל W .

ג. האם $(-3, 1, 1, 0) \in W$?

5. יהי $n \geq 2$ ותהי מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש $\text{rank}(A) = 1$ ותהי $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ההעתקה הלינארית

$$Tv = Av$$

- א. מצאו את $\dim \text{Im} T$ ואת $\dim \text{ker} T$.
- ב. הוכיחו ש 0 הינו ערך עצמי של A ומצאו את הריבוי הגאומטרי שלו.
- ג. הוכיחו ש A אינה לכסינה אם ורק אם $\text{Im} T \subseteq \text{ker} T$.

