# המט' המלווה פולינום — Companion matrix

יהיו $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{F}$ ; $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. $A$ נקראת "המט' המלווה של הפולינום $a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$".

אזי: $p_A(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ (הפולינום האופייני של $A$).

**הוכחה:** חישוב ישיר:

$$p_A(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & x & -1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{vmatrix} \underset{n \text{ פיתוח לפי שורה}}{=} (-1)^{n+1}a_0\cdot\begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n+2}a_1\begin{vmatrix} x & & \\ & -1 & 0 \\ * & & \ddots \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+3}a_2\begin{vmatrix} x & & & \\ & x & 0 & \\ & & -1 & \\ * & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots+(-1)^{n+(n-1)}a_{n-2}\begin{vmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & x \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+n}(x+a_{n-1})\begin{vmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & x \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{n+1}a_0(-1)^{n-1}+(-1)^{n+2}a_1x(-1)^{n-2}+(-1)^{n+3}a_2x^2(-1)^{n-3}+\dots$$
$$\dots+(-1)^{2n-1}a_{n-2}x^{n-2}(-1)+(x+a_{n-1})x^{n-1} =$$

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}+x^n. \quad //$$

**מסקנה:** לכל פולינום $f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\dots+\alpha_nx^n$ ממעלה $n$ מעל $\mathbb{F}$, יש מט' $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $f(A)=0$.

**הוכחה:** $\alpha_n\neq0$. נגדיר $g(x)=\frac{\alpha_0}{\alpha_n}+\frac{\alpha_1}{\alpha_n}x+\dots+\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}x^{n-1}+x^n$, כלומר $g(x)=\frac{1}{\alpha_n}\cdot f(x)$.

מהאמור לעיל, $g(x)$ הוא הפולינום האופייני של המט' המלווה $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} & \cdots & & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{pmatrix}$.

לכן, לפי משפט קיילי-המילטון, $g(A)\underset{g(x)=p_A(x)}{=}p_A(A)=0$. לכן, $f(A)\underset{f(x)=\alpha_n g(x)}{=}\alpha_n\cdot g(A)=\alpha_n\cdot 0=0$. //