בוחן לדוגמא

יש לבחור שלוש שאלות מתוך ארבעת השאלות. משך הבוחן: 100 דקות

שאלה 1

חשב את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

א. $\int \sin x \cos 5x dx$.

ב. $\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$

שאלה 2

א. חשב את אורך העקום $y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$ בתחום $0 \le x \le 3$.

ב. רשום באמצעות נוסחת נסיגה פתרון ל $\int x^n \sin x dx$.

שאלה 3

א. חשב את האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

ב. קבעו התכנסות/התבדרות של $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$.

שאלה 4

א. בדוק התכנסות של $\int_1^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{\ln x}$. השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x=3$ וציר ה x מסתובב סביב ציר ה x. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל.

פתרון 1

א. נשתמש בזהויות $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$$\int \sin x\cos 5x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 6x+\sin(-4x))dx = \int \frac{1}{2}(\sin 6x-\sin(4x))dx = -\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 4x+c$$

ב. נציב $t = tgx$ ואז $dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x}dx = \int\left(1-\frac{6t}{1+t^2}\right):\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^2-6t+1}{1+t^2}:\left(\frac{2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2-6t+1}{2+2t^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{6t}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1-3\cdot\frac{2t}{t^2+1}\right)dt = \frac{t}{2}-\frac{3}{2}\ln(t^2+1)+c = \frac{tgx}{2}-\frac{3}{2}\ln((tgx)^2+1)+c$$

פתרון 2

א. נשתמש בנוסחה לחישוב אורך עקום $\int\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

$$y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = 2x\cdot\sqrt{(1+x^2)}$$

$$(y')^2 = 4x^2\cdot(1+x^2)$$

נשאר לחשב $\int_0^3\sqrt{1+4x^2+4x^4}dx = \int_0^3(1+2x^2)dx = \left[x+\frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = 21$.

ב. נסמן $I_n = \int x^n\sin xdx$ נחשב תחילה את I_1 .

$$I_1 = \int x\sin xdx = -x\cos x+\sin x$$

נחשב את $I_n = \int x^n\sin xdx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$I_n = \int x^n\sin xdx = -x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos xdx = -x^n\cos x+n(x^{n-1}\sin x)-n(n-1)\int x^{n-2}\sin xdx =$$
$$= -x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)I_{n-2}$$

מכיוון שקיבלנו את I_n באמצעות I_{n-2} יש לחשב בנוסף ל I_1 גם את I_2 .

$I_2 = \int x^2\sin xdx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

נסמן:
$$u' = 2x \Leftarrow u = x^2$$
$$v = -\cos x \Leftarrow v' = \sin x$$

$$I_2 = \int x^2\sin xdx = -x^2\cos x+2\int x\cos xdx = -x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$$

נקבל את התשובה

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}$$
$$I_1 = -x\cos x + \sin x$$
$$I_2 = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$$

<u>פתרון 3</u>

א. נציב $t = \arctan x$ מכיון ש $\arctan 0 = 0, \lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$ ו $dt = \frac{dx}{1+x^2}$

נקבל: $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$.

ב. לכל $1 < x$ נקבל ש $\frac{\pi}{4} < \arctan x$ ולכן $\frac{\pi}{4x} < \frac{\arctan x}{x}$. מכיוון ש $\int_1^\infty \frac{\pi}{4x}dx$ מתבדר נקבל

ממבחן ההשוואה הראשון ש $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}dx$ מתבדר.

<u>פתרון 4</u>

א. נשתמש במבחן דיריכלה.

נסמן ; $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ $\quad g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ונבדוק את התנאים של מבחן דיריכלה.

לכל $\boldsymbol{x}$ מתקיים $\boldsymbol{\left|\int_0^x f(t)dt\right| = |1-\cos x| \le 2}$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = 0$$

כדי להוכיח שפונקציה $\boldsymbol{g(x)}$ מונוטונית יורדת נחשב את הנגזרת $\boldsymbol{g'(x)}$

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$\boldsymbol{g'(x) < 0}$ לכל $x > 1$, לכן $\boldsymbol{g(x)}$ יורדת החל מ $x > 1$

התנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן האינטגרל מתכנס.

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \ge 1$. כדי לחשב נפח גוף סיבוב סביב ציר ה x נשתמש בנוסחה $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$.

$$V = \pi\int_1^3 x^2 \ln x dx = \pi\left[\frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9}\right] = \pi\left(9\ln 3 - 2\frac{8}{9}\right)$$