תרגיל 6

1. תהא $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ נגדיר ה"ל

$$T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$$

המוגדרת ע"י

$$T(B)=A\cdot B$$

מצא את המרחבים העצמיים של T והוכח כי T אינה לכסינה

פתרון : נחשב מטריצה מייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי $\{e_{i,j}|1\leq i,j,\leq 2\}$.

$$\begin{aligned}
Te_{1,1} &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=e_{1,1}\\
Te_{1,2} &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=e_{1,2}\\
Te_{2,1} &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=e_{1,1}+e_{2,1}\\
Te_{2,2} &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=e_{1,2}+e_{2,2}
\end{aligned}$$

ולכן

$$U=[T]=\begin{pmatrix}1&&1&\\&1&&1\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$f_U(\lambda)=(\lambda-1)^4$$

ויש לה ע"ע יחיד =1. מרחב עצמי שלו הוא

$$V_{\lambda=1}=N(U-I)=N(\begin{pmatrix}&&1&\\&&&1\\&&&\\&&&\end{pmatrix})=\left\{\begin{pmatrix}t\\s\\0\\0\end{pmatrix}|t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

כיוון שר"ג = 2 קטן ממש מ 4 = ר"א. ולכן T אינה לכסינה

2. נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(א) הוכח כי לכל a מתקיים כי A לכסינה

פתרון : נחשב פ"א

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & -a+2 \\ -1 & \lambda-1 & -a+2 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{pmatrix}\right| = (\lambda-a)\left|\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & -a+2 \\ -1 & \lambda-1 & -a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda-a)\left[(\lambda-2)(\lambda-1)\right] \end{aligned}$$

אם $a \neq 1, 2$ אזי יש 3 ע"ע עצמיים שונים מר"א =1. לכל אחד הר"ג לפחות 1 ולכן הוא בדיוק 1. לפי משפט A לכסינה.
אם $a = 1$ ר"א של $\lambda = 1$ הוא 2 נבדוק ר"ג

$$N(A-I) = N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

לכן ר"ג =2 ולכן Aלכסינה גם במקרה זה.
אם $a = 2$ ר"א של $\lambda = 2$ הוא 2 נבדוק ר"ג

$$N(A-2I) = N(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ t \end{pmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

לכן ר"ג =2 ולכן Aלכסינה גם במקרה זה.

(ב) עבור כל ערך a מצא מטריצה P_a הפיכה, D_a אלכסונית המקיימות

$$D_a = P_a^{-1} A P_a$$

פתרון : הערכים העצמיים הם $1, 2, a$ נמשיך את החישובים ונמצא ו"ע
אם $a \neq 1, 2$

$$N(A-I) = N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-2 \\ 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N(A-2I) = N(\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-2 \\ 1 & -1 & a-2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N(A-aI)=N(\begin{pmatrix} 2-a & 0 & a-2 \\ 1 & 1-a & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=N(\begin{pmatrix} 2-a & 0 & a-2 \\ a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}|t\in\mathbb{R}\right\}$$

ולכן במקרה זה נגדיר

$$P_a=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_a=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & a \end{pmatrix}$$

אם $a=1$

$$P_a=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_a=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

בהתבסס על הו"ע שמצאנו במקרה הכללי ובסעיף הקודם.

אם $a=2$

$$P_a=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_a=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

בהתבסס על הו"ע שמצאנו במקרה הכללי ובסעיף הקודם.

3. עבור אילו ערכי a המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ <u>אינה</u> לכסינה?

(א) כאשר $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

(ב) כאשר $A\in\mathbb{C}^{3\times 3}$

פתרון : הפולינום האופיני של A הוא

$$f_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -a & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -a \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2-a\right]$$

במקרה שמוגדר ניתן להמשיך ל

$$f_A(\lambda)=(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2-a\right]=(\lambda-1)\left[(\lambda-1+\sqrt{a})(\lambda-1-\sqrt{a})\right]$$

אם הפולניום האופיני לא מתפרק לגורמים לינארים אזי המטריצה אינה הפיכה.

מתי הפולינום האופיני לא מתפרק לגורמים לינארים־ כלומר, מתי המעבר הנוסף אינו מוגדר?

כאשר מדובר במטריצה ממשית ($a\in\mathbb{R}$) וגם $a<0$. בכל שאר המקרים (אם $a\leq 0$ או שהמטריצה מרוכבת) הפולינום מתפרק לגורמים לינארים.

נמשיך:

אם $a \neq 0$ אזי יש ל A שלושה ע"ע שונים ($1, 1-\sqrt{a}, 1-\sqrt{a}$) ולכן היא לכסינה.
אם $a = 0$ אזי נקבל ע"ע $\lambda = 1$ בודד עם ר"א 3.
מטריצה לכסינה אמ"מ ר"א=ר"ג לכל ע"ע (בהנחה שהפ"א מתפרק לגורמים לינארים)
מה הר"ג של $\lambda = 1$? 1 כי

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לסיכום:
המטריצה A לא תהיה לכסינה במקרים הבאים:

i. A ממשית ו $a < 0$

ii. $A = 0$

4. היעזרו במשפט קילי המילטון לענות על השאלות הבאות (תזכורת- משפט קיילי המילטון: תהא A מטריצה, יהא $f_A(x)$ הפ"א שלה אזי $f_A(A) = 0$):

(א) תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה. הוכיחו כי קיים פולניום ממעלה קטנה שווה ל $n-1$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

המקיים

$$A^{-1} = p(A)$$

פתרון : נסמן את הפ"א

$$f_A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

כיוון ש A הפיכה אזי $a_0 \neq 0$. ממשפט קילי המילטון מתקיים כי

$$\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = f_A(A) = 0$$

לכן

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A^i = -a_0 I$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} (-a_0)^{-1} a_i A^i = I$$

נוציא Aונקבל

$$A\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(-a_0\right)^{-1}a_iA^i\right)=I$$

ומכאן ש

$$A^{-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(-a_0\right)^{-1}a_iA^i$$

ולכן הפולינום שעונה על השאלה הוא

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(-a_0\right)^{-1}a_ix^i$$

(ב) חשב את את A^{-2},A^{12} עבור המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון : הפ"א הוא

$$\begin{aligned}f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\\lambda-1&\lambda&-1\\\lambda-1&0&\lambda\end{pmatrix}\right|\\ &= (\lambda-1)\left|\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&\lambda&-1\\1&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&\lambda+1&-1\\0&1&\lambda\end{pmatrix}\right|\\ &= (\lambda-1)\left[\lambda\left(\lambda+1\right)+1\right]=(\lambda-1)\left[\lambda^2+\lambda+1\right]=\lambda^3-1\end{aligned}$$

לפי קיילי המילטון

$$A^3=I$$

כלומר $A^{-2}=A$

בנוסף

$$A^{12}=\left(A^3\right)^4=I^4=I$$

בהצלחה!