# תורת הגרפים - הרצאה 11

15 בינואר 2012

## בעיית רמזי

### למת לחיצות הידיים

אם ששה אנשים מגיעים למסיבה ולוחצים ידיים אז יש שלשה שלחצו ידיים זה לזה או שלשה שלא לחצו ידיים זה לזה.

### הוכחה

הלמה שקולה לטענה הבאה:
בכל גרף פשוט מסדר 6, $G$, יש ל$G$ תת גרף איזומורפי ל$K_3$ או יש ל$\bar{G}$ יש תת גרף איזומורפי ל$K_3$.
נוכיח את הטענה.
יהי $G$ גרף מסדר 6 שקב' קדקדיו $V$.
לכל קדקד $u \in V$:

$$d_G(u) + d_{\bar{G}}(u) = 5$$

לכן:

$$d_G(u) \geq 3$$

או

$$d_{\bar{G}}(u) \geq 3$$

בה"כ, $d_G(u) \geq 3$.
יהיו $x,\, y,\, z$ שכנים של $u$ ב$G$.
אם אין ב$G$ אין משולש, אז $(x,\, y),\, (x,\, z),\, (y,\, z) \notin E(G)$, מכאן $xyz$ משרים משולש ב$\bar{G}$.

## הגדרה

יהיו $s,\, t$ מס' טבעיים.
מס' רמזי $R(s,\, t)$ הוא המס' הטבעי המינימלי $n$ כך שכל גרף פשוט $G$ מסדר $n$ מקיים:
$G$ מכיל תת גרף איזומורפי ל$K_s$ או $\bar{G}$ מכיל תת גרף איזומורפי ל$K_t$.
במילים אחרות - $n$ הוא המס' המינימלי המקיים:
אם נצבע צלעות גרף שלם $K_n$ בשני צבעים (אדום וכחול) אז יש תת גרף מושרה מסדר $s$ שכל צלעותיו כחולות או תת גרף מושרה מסדר $t$ שכל צלעותיו אדומות.

## עובדה 1

לכל $s,\, t$:

$$R(s,\, t) = R(t,\, s)$$

## עובדה 2

לכל $t$ טבעי:

$$R(1,\, t) = 1$$

## עובדה 3

לכל $t \geq 2$ טבעי:

$$R(2,\,t) = t$$

## טענה 4

$$R(3,\,3) = 6$$

### הוכחה

הוכחנו ש$R(3,\,3) \leq 6$ לפי למת לחיצת הידיים.
מאידך, לכל $n \leq 5$ יש גרף $G$ מסדר $n$ כך ש$G$ לא מכיל משולש וגם $\bar{G}$ לא מכיל משולש.
עבור $n = 3$ - $P_3$.
$n = 4$: $C_4$.
$n = 5$ - $C_5$.

## משפט רמזי (1930)

לכל $s,\,t$ טבעיים, $R(s,\,t) < \infty$.
בעייה חשובה - חשב את $R(s,\,t)$ (בעייה פתוחה עבור רוב המקרים).

### הוכחה

עבור $s \leq 2$ או $t \leq 2$, המשפט נכון לפי העובדות לעיל.
נוכיח טענה חזקה יותר:
לכל $s \geq 3$ ו$t \geq 3$ טבעיים, $R(s,\,t)$ סופי וכן $R(s,\,t) \leq R(s-1,\,t) + R(s,\,t-1)$.
נוכיח טענה זו באינדוקציה על $s+t$.
$s+t$ המינימלי בתנאי הטענה הוא $s+t=6$ כאשר $s=t=3$.
לפי טענה 4, $R(3,\,3) = 6$.
לפי העובדות לעיל, $R(2,\,3) = R(3,\,2) = 3$.
לכן:

$$R(3,\,3) = 6 = 3 + 3 = R(2,\,3) + R(3,\,2)$$

והטענה נכונה עבור $s=t=3$.
נניח נכונות הטענה עבור $s+t<m$.
יהיו $s,\,t$ כך ש$s+t=m$.
נסמן:

$$N = R(s-1,\,t) + R(s,\,t-1)$$

זה מס' סופי לפי הנחת האינדוקציה.
יהי $G$ גרף מסדר $N$.
לכל קדקד $u \in E(G)$ מתקיים:

$$\begin{aligned} d_G(u) + d_{\bar{G}}(u) &= N - 1 \\ &= R(s-1,\,t) + R(s,\,t-1) - 1 \end{aligned}$$

לא ייתכן שיתקיים:

$$d_G(u) < R(s-1,\,t)$$

וגם

$$d_{\bar{G}}(u) < R(s,\,t-1)$$

בה"כ, $d_G\left(u\right)\geq R\left(s-1,\,t\right)$.
נתבונן בתת הגרף $H$ של $G$ המושרה ע"י שכני $u$. הסדר שלו לפחות $R\left(s-1,\,t\right)$.
לכן $H$ מכיל תת גרף איזומורפי ל$K_{s-1}$ או ש$\bar{H}$ מכיל תת גרף איזומורפי ל$K_t$.
אם $\bar{H}$ מכיל $K_t$ אז גם $\bar{G}$ מכיל $K_t$ וסיימנו.
אם $H$ מכיל $K_{s-1}$, אז יחד עם $u$ הוא מכיל $K_s$ וסיימנו.
מש"ל.

## תזכורת

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

נוסחת רלב"ג - פסקל:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}$$

## מסקנה

לכל $s,\,t\geq 2$:

$$R\left(s,\,t\right)\leq\binom{s+t-2}{s-1}$$

## הוכחה

באינדוקציה על $s+t$.
אם $s+t=4$ (כאשר $s=t=2$) אז

$$2=R\left(2,\,2\right)\leq\binom{2}{1}=2$$

נניח נכונות עבור $s+t<m$.
יהיו $s,\,t\geq 2$ טבעיים כך ש$s+t=m$.
אזי לפי הטענה שהוכחנו במשפט,

$$\begin{aligned}R\left(s,\,t\right) & \leq R\left(s-1,\,t\right)+R\left(s,\,t-1\right)\\ & \leq\binom{s+t-3}{s-2}+\binom{s+t-3}{s-1}\\ & =\binom{s+t-2}{s-1}\end{aligned}$$

## דוגמה

$$R\left(k,\,k\right)\leq\binom{2k-2}{k-1}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(k-1\right)}}2^{2k-2}$$

זה לכל היותר מעריכי ב$k$.

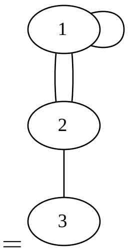
## בעייה פתוחה

הערכת $R\left(s,\,t\right)$.

# תורת הגרפים האלגברית

## הגדרה

יהי $G$ גרף (יכול להיות עם ריבוי צלעות, לולאות, יכול להיות מכוון) מסדר סופי ועם מס' סופי של צלעות.
נניח סדר $G$ הוא $n$, ובה"כ קדקדיו $\{v_1, ..., v_n\}$.
נגדיר <u>מטריצת שכנות</u> (Adjacency Matrix) של $G$ $A_G$ -מטריצה מסדר $n\times n$ שאבריה שלמים אי שליליים
כך ש$a_{ij}$ מס' הצלעות ב$v_i$ ל$v_j$.
למשל:




$G =$

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## עובדות

1. $A_G$ סימטרית $\iff$ $G$ לא מכוון (או שהוא מכוון ומס' הצלעות מ$i$ ל$j$ שווה למס' הצלעות מ-$j$ ל$i$).
2. מס' הלולאות ב$G$ = $\mathrm{trace}\left(A_G\right)$.
3. בגרף לא מכוון ללא לולאות:

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

4. לכל קדקד $v_i \in V\left(G\right)$:

$$d_G\left(v_i\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$$

בפרט, אם הגרף $k$-רגולרי, סכום האיברים בכל שורה ובכל עמודה שווה.

5. אם $G$ פשוט (לא מכוון):

$$\mathrm{Tr}\left(A_G^2\right) = 2\left|E\left(G\right)\right|$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(A_G^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(A_G^2\right)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}a_{ji}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \end{aligned}$$

$G$ פשוט לכן $a_{ij}$ הוא $0$ או $1$ לכן

$$\mathrm{Tr}\left(A_G^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 2\left|E\left(G\right)\right|$$

### הערה

נדון בגרפים לא מכוונים.

### מסקנה 6

בגרף פשוט לא מכוון:

$$\left(A_G^2\right)_{ii} = d_G\left(v_i\right)$$

הוכחה: השלם.

## טענה 7

לכל גרף $G$ סופי מסדר $n$, $m$ טבעי, $1 \le i, j \le n$:
$\left(A_G^m\right)_{ij}$ = מס' ההילוכים מאורך $m$מ$v_i$ ל$v_j$.

### הוכחה

באינדוקציה על $m$.
אם $m = 1$:
$\left(A_G^1\right)_{ij}$ = מס' הצלעות מ$v_i$ ל$v_j$ = מס' ההילוכים מאורך 1 מ$v_i$ ל$v_j$.
נניח נכונות עבור $m$.
כעת:

$$\left(A_G^{m+1}\right)_{ij} = \left(A_G^m \cdot A_G\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(A_G^m\right)_{ik} \cdot \left(A_G\right)_{kj}$$

וזה שווה לסכום על $k$ של מס' ההילוכים מ$v_i$ ל$v_k$ באורך $m$ כפול מס' הצלעות מ$v_k$ ל$v_j$ וזה סכום על $k$ של מס' ההילוכים מאורך $m+1$ מ$v_i$ ל$v_j$ כך שבצעד ה$m$ נמצאים ב$v_k$, וזה בדיוק מס' ההילוכים מאורך $m+1$ מ$v_i$ ל$v_j$.

## מסקנה 8

לכל גרף $G$ סופי ו$m$ טבעי, $\left(A_G^m\right)$ = מס' ההילוכים הסגורים מאורך $m$ ב$G$.

## תזכורת

$\lambda$ ערך עצמי של מטריצה $A$ עם וקטור עצמי $u \neq 0$ אם מתקיים:

$$Au = \lambda u$$

### דוגמה

$$\begin{aligned}
G &= K_2 \\
A_{K_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -1
\end{aligned}$$

### המשך תזכורת

אם $A$ סימטרית אז הע"ע של $A$ ממשיים ויש לה בסיס אורתונורמלי של ו"ע.
נסמן $\mathrm{spec}\left(A\right)$ אוסף ע"ע (עם ריבוי).
לכל $m$ טבעי מתקיים

$$\mathrm{Tr}\left(A^{m}\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}^{m}$$

כאשר $A$ מסדר $n\times n$ עם ע"ע $\lambda_{1},\,...,\,\lambda_{n}$.

## משפט 9

יהי $G$ גרף סופי לא מכוון עם $\lambda_{1}\geq\lambda_{2}\geq...\geq\lambda_{n}$ ע"ע של $A_{G}$ מתקיים לכל $m$ טבעי שמס' ההילוכים הסגורים מאורך $m$ שווה ל:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}^{m}$$

### הוכחה

לפי המסקנה והתזכורת.

## הגדרה

אוטומורפיזם של גרף $G=\left(V,\,E\right)$ היא העתקה $\varphi:\;V\to V$ חח"ע ועל שהיא איזומורפיזם (כלומר מעבירה את הגרף לעצמו).

## הגדרה

גרף הוא טרנזטיבי-קדקדים אם לכל זוג קדקדים $u,\,v\in V\left(G\right)$ יש אוטומורפיזם של $G$, $\varphi$, המקיים:

$$\varphi\left(u\right)=v$$

### הערה

כל גרף טרנזטיבי קדקדים הוא בהכרח רגולרי.

### דוגמאות

1. כל מעגל $C_{n}$.
2. $K_{n}$
3. גופים אפלטוניים (בפרט קוביה).

## מסקנה 10

אם $G$ טרנזטיבי קדקדים, $k$-רגולרי מסדר $n$, אז ההסתברות לחזור לקדקד המוצא בהילוך מאורך $m$ היא:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}^{m}}{k^{m}}$$

כאשר $\lambda_{1}\geq...\geq\lambda_{n}$ ע"ע של $A_{G}$.

### הוכחה

מס' ההילוכים הסגורים מאורך $m$ שווה ל־$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^m$.
מס' ההילוכים מאורך $m$ הוא $n\cdot k^m$ ($n$ אפשרויות לבחור נק' התחלה ואז $k$ אפשרויות ללכת כל פעם).
לכן, ההסתברות של הילוך אקראי להיות סגור הוא:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^m}{nk^m}$$

מכיוון שהגרף טרנזטיבי קדקדים, ההסתברות הזו שווה על כל הקדקדים (בגרף רגיל זו ההסתברות הממוצעת).

### דוגמה - בעיית השיכור (מרקוב)

יש שיכור שעומד בין שני פאבים.
הוא רוצה להגיע לפאב, אבל הוא לא יודע איך ללכת, אז הוא הולך בהסתברות $\frac{1}{2}$ ימינה והסתברות $\frac{1}{2}$ שמאלה.
שאלה - היכן יימצא השיכור אחרי $n$ צעדים?
זה הילוך אקראי על $P_n$.
(את הבעיה הזו אנו לא יודעים לפתור עם המשפט).

### דוגמה אחרת - $K_2$

מה הסתברות החזרה בהילוך אקראי בן $m$ צעדים?

$$P_r=\begin{cases}1 & \text{m is even}\\ 0 & \text{m is odd}\end{cases}$$

### הערה

הילוך אקראי על גרף - בכל צעד מגרילים שכן בהסתברות אחידה.

### דוגמה נוספת - $K_3$

מה הסתברות החזרה בהילוך אקראי במשולש?

$$A_G=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

הע"ע הם:

$$\text{spec}=\{\{-1,-1,2\}\}$$

לכן הסתברות החזרה:

$$P_r=\frac{2^m+(-1)^m+(-1)^m}{3\cdot 2^m}=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^m}{3\cdot 2^{m-1}}$$

## משפט

גרף $G$ הוא דו צדדי $\iff$ ($\lambda$ ע"ע בריבוי $k$ של $A_G$ $\Leftarrow$ $-\lambda$ ע"ע בריבוי $k$ של $A_G$)

### הוכחה

נניח שהצד השמאלי נכון.
מס' ההילוכים הסגורים מאורך אי זוגי $2m+1$ שווה לסכום

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{2m+1}$$

כאשר $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$, ומתקיים $\lambda_i = -\lambda_{n+1-i}$.
לכן:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2m+1} &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i^{2m+1} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \lambda_i^{2m+1} \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i^{2m+1} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} -\lambda_i^{2m+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

לכן אין מעגלים מאורך אי זוגי ב-$G$ ולכן $G$ דו צדדי.
כיוון שני:
נניח ש-$G$ דו צדדי.
בה"כ, $v_1, ..., v_k$ צד א' ו-$v_{k+1}, ..., v_n$ צד ב'.
יהי $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}$ ו"ע עם ע"ע $\lambda$. מתקיים:

$$A_G \cdot u = \lambda u$$

לכן לכל $1 \leq i \leq n$, $(A_G u)_i = \lambda u_i$.

$$(A_G u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \lambda u_i$$

נתבונן בוקטור:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ -u_{k+1} \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$$

### טענת עזר

$$A_G \cdot \bar{u} = -\lambda \bar{u}$$

### הוכחת טענת העזר

נניח $1 \leq i \leq k$ (מקרה א').

$$
\begin{aligned}
(A_G\bar{u})_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{u}_j \\
&= \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}\bar{u}_j \\
&= \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} \cdot (-u_j) \\
&= -\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}u_j \\
&= -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j \\
&= -\lambda u_i = -\lambda\bar{u}_i
\end{aligned}
$$

המקרה השני, $k+1 \leq i \leq n$, דומה.
לכן, אם $\lambda$ ע"ע, גם $-\lambda$ ע"ע, מש"ל.