אינפי 1 תרגיל 12

4 בפברואר 2017

1. הוכיחו לפי ההגדרה האינפיניטסימלית:

א. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ עבור $a > 1$.

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ עבור $0 < a < 1$.

פתרון:

א. ניזכר שלכל $b > 0$ מתקיים $\forall x > 0 : (1+b)^x \geq 1 + bx$, ולכן זה נכון גם לכל H אינסופי חיובי, ולכן אם $a > 1$, נכתוב אותו כ־$1 + b$, עבור $b > 0$ מתאים ונקבל

$$a^H = (1+b)^H \geq 1 + bH$$

והימני הוא כמובן מספר אינסופי. לכן קיבלנו מספר אינסופי ולכן זהו הגבול.

ב. נציב N אינסופי שלם. לכל r מספר ממשי, $\log_a r$ הוא גם מספר ממשי, ולכן: $N > \log_a r$, נפעיל a בחזקת על כל האי־שוויון, לקבל: $a^N < r$ לכל r ממשי, ולכן a^N הוא חיובי שגדול מכל מספר ממשי, כלומר־ אינפיניטיסימלי. לכן, $st(a^N) = 0$ לכל N.

שימו לב שבגלל ש $a < 1$, כשעשינו "a בחזקת" על שני אגפי האי־שוויון, הסימן של האי־ שוויון התחלף.

2. הוכח לפי הגדרת $N - \epsilon$ של הגבול: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$.

פתרון:

יהי $\epsilon > 0$ נתון. אנחנו רוצים שיתקיים: $|\frac{n^2}{n^2+1} - 1| < \epsilon$. ובכן:

$|\frac{n^2}{n^2+1} - 1| = |\frac{n^2 - n^2 - 1}{n^2+1}| = |\frac{-1}{n^2+1}| = \frac{1}{n^2+1}$.

בשביל ש: $\frac{1}{n^2+1} < \epsilon$ צריך: $n^2 + 1 > \frac{1}{\epsilon}$, כלומר: $n^2 > \frac{1}{\epsilon} - 1$. אם $\epsilon > 1$ נקבל מספר שלילי, ואז האי שוויון נכון תמיד. אחרת, זה גורר ש: $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$. אז נבחר

$n_0=[\sqrt{\frac{1}{\epsilon}-1}]$, ונקבל, שלכל $n>n_0$, $n>\sqrt{\frac{1}{\epsilon}-1}$ ולכן $\frac{1}{n^2+1}<\epsilon$. כלומר, לכל ϵ מצאנו n_0 מתאים. מש"ל.

3. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

א. $<\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}>$.

ב. $<\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}>$.

ג. $<\frac{n^3}{n!}>$.

ד. $<\frac{n}{(\ln n)^2}>$.

ה. $<(\frac{2n^3-1}{2n^3+3})^{3n^3+4}>$.

ו. $<2^n-n^2>$.

ז. $<\sqrt[n]{n}>$.

ח. $<\frac{n!+2}{(n+1)!+1}>$.

ט. $<\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}>$.

פיתרון:

א. $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}=\frac{(n+1)^n}{n\cdot n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot(\frac{n+1}{n})^n=\frac{1}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$.

לכן: $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=0\cdot e=0$.

ב. $\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{(\frac{2}{3})^n-1}$. כעת נציב מספר אינסופי שלם N, ונשים לב שידוע ש $(\frac{2}{3})^N$ הוא אינפיניטיסימילי. לכן: $st\frac{(\frac{2}{3})^N+1}{(\frac{2}{3})^N-1}=-1$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=-1$.

ג. $\frac{n^3}{n!}=\frac{n^3}{2^n}\cdot\frac{2^n}{n!}$. לכן: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0\cdot 0=0$. (אילו גבולות ידועים).

ד. $(\frac{\sqrt{n}}{\ln n})^2 = \frac{n}{(\ln n)2}$. ואם נציב מספר אינסופי אנחנו יודעים שנקבל מספר אינסופי בריבוע (כי ידוע ש $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \infty$) ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^2} = \infty$.

ה. מתקיים: $(\frac{2n^3-1}{2n^3+3})^{3n^3+4} = (\frac{2n^3+3}{2n^3-1})^{-3n^3-4} = (\frac{2n^3-1+4}{2n^3-1})^{-3n^3-4} = (1+\frac{4}{2n^3-1})^{-3n^3-4} = (1+\frac{4}{2n^3-1})^{2n^3-1\frac{(-3n^3-4)}{(2n^3-1)}} = ((1+\frac{4}{2n^3-1})^{2n^3-1})^{\frac{(-3n^3-4)}{(2n^3-1)}}$

נשים לב ש $2n^3-1\to\infty$ ולכן לפי משפט שהוכחנו בכיתה $(1+\frac{4}{2n^3-1})^{2n^3-1}\to e^4$. בנוסף, $\frac{(-3n^3-1)}{(2n^3-1)}\to -\frac{3}{2}$ ולכן: $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n^3-1}{2n^3+3})^{3n^3+4} = (e^4)^{-\frac{3}{2}} = e^{-6}$.

ו. $\lim_{n\to\infty}2^n-n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-n^2}{n^2}\cdot n^2 = \lim_{n\to\infty}(\frac{2^n}{n^2}-1)\cdot n^2 = \lim_{n\to\infty}(\frac{2^n}{n^2}-1)\cdot\lim_{n\to\infty}n^2 = \infty\cdot\infty = \infty$

הערה: $\frac{2^n}{n^2}$ הוא גבול ידוע.

ז. $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\ln n\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. ידוע ש $\frac{\ln n}{n}\to 0$ לכן $\lim\sqrt[n]{n} = \lim e^{\frac{\ln n}{n}} = \lim e^0 = 1$.

ח. $\frac{1+\frac{2}{n!}}{n+1+\frac{1}{n!}} = \frac{n!+2}{(n+1)!+1}$ אם נציב N אינסופי שלם נקבל מס' סופי חלקי אינסופי, כלומר, אינפיניטיסימלי. לכן $\lim\frac{n!+2}{(n+1)!+1} = 0$.

ט. נציב מספר אינסופי שלם $\frac{(-1)^N}{\sqrt{N}}$ נקבל מס' סופי חלקי אינסופי, כלומר, אינפ־יניטיסימלי. לכן $\lim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$.

4. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $< a_n >$ סדרה מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$

ב. אם $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$ אז $< a_n >$ סדרה מתכנסת.

ג. אם $< a_n >$ סדרה מתכנסת לגבול L, אז $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_n) = 2L$

ד. אם $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_n) = L$ אז $< a_n >$ סדרה מתכנסת.

ה. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ו. $<a_n>$ סדרת קושי אמ"ם לכל פו' רציפה במ"ש f, $<f(a_n)>$ היא סדרת קושי.

פיתרון:

א. הוכחה: $<a_n>$ מתכנסת, לכן לכל מס' אינסופי שלם שנציב, N, $st(a_N)$ סופי וקבוע, בפרט, אם נציב $N+1, N$, $st(a_N) = st(a_{N+1})$ לכן $st(a_{N+1} - a_N) = 0$, אז $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

ב. הפרכה: נסתכל על הסדרה $\sqrt{n}$. זה ברור שהיא מתבדרת לאינסוף, אבל: $a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$.

ג. הוכחה: $<a_n>$ מתכנסת, לכן לכל מס' אינסופי שלם שנציב, N, $st(a_N) = L$. בפרט, אם נציב $N+1, N$, $st(a_N) = st(a_{N+1}) = L$ לכן $st(a_{N+1} + a_N) = 2L$, אז $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 2L$.

ד. הפרכה: ניקח את הסדרה $(-1)^n$. נקבל $\forall n : a_{n+1} + a_n = 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_n) = 0$, אבל זו סדרה מתבדרת.

ה. הפרכה: נסתכל על הסדרה $\frac{1}{n}$. ברור שהיא שואפת לאינסוף, אבל: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$.

ו. הוכחה: $\Longleftarrow$:אם $<a_n>$ סדרת קושי, זה אומר שלכל N, M אינסופיים שלמים שנציב $a_N \approx a_M$, ומכיוון שf רציפה במ"ש נקבל ש $f(a_N) \approx f(a_M)$, לכן $<f(a_n)>$ סדרת קושי.

$\Longrightarrow$: אם $<f(a_n)>$ קושי לכל f רציפה במ"ש, זה נכון בפרט לפו' $f(x) = x$, שידוע שהיא פו' רציפה במ"ש. לכן $<a_n> = <f(a_n)>$סדרת קושי.