2222

תשע"ג

2013

שאלון סגור

אלגברה ליניארית 1

מועד א. *88-112* מרצה: פרופ' א. רזניקוב.

משך בחינה : **3** שעות (**לאחר הארכה**).

הנחיות: יש לפתור את כל 3 השאלות. (הציון המקסימאלי הוא 100)

אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תבדק.

שאלון סגור

1.

יהיו $U,W \subseteq V$ שני תתי-מרחב במרחב נוצר סופית.

א) (5 נק') הוכיחו שאם $\dim U + \dim W > \dim V$ אזי $U \cap W \neq \{0\}$.

ב) (15 נק') נניח שמתקיים $\dim(U+W) = \dim(U \cap W) + 1$. הוכיחו שאחד מוכל בתוך השני (כלומר $U \subseteq W$ או $W \subseteq U$).

ג) (15 נק') תהי V מרחב עם $\dim V = n$. הוכיחו שקיימים $n+1$ תתי-מרחב $U_i \subseteq V$, $0 \le i \le n$ כך ש- $U_i \subseteq U_{i+1}$ ו- $U_i \neq U_{i+1}$. הוכיחו גם ההפך: אם קיימת קבוצה מקסימאלית של U_i כאלה אזי $\dim V = n$.

רמז: מה הוא $\dim U_i$?

2.

א) (17 נק') יהיו $A,B \in M_{m\times n}(F)$ מטריצות המקיימות $Cspan(A) \subseteq Cspan(B)$. הוכיחו שקיימת מטריצה $C \in M_{n\times n}(F)$ כך ש- $A = BC$.

ב) (17 נק') יהיו $A,B \in M_{n\times n}(F)$. הוכיחו שאם AB איננה הפיכה ו- $Cspan(B) \cap Null(A) = \{0\}$ אזי B איננה הפיכה.

3.

א) (17 נק') יהיו $U \subseteq V$ מרחב ותת-מרחב מעל F כך ש- $\dim U = \dim V - 1$. הוכיחו שקיים פונקציונאל $\varphi: V \to F$ המקיים $Ker(\varphi) = U$.

ב) (17 נק') יהיו $v,u \in V$ שני ווקטורים בת"ל במרחב ווקטורי נוצר סופית מעל שדה F. הוכיחו שקיים פונקציונאל $\varphi: V \to F$ המקיים $\varphi(v) = 0$ ו- $\varphi(u) = 1$.

בהצלחה!

נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תבדק.

נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

טופס פתרונות שאלון סגור

אלגברה ליניארית 1, מועד א. 88-112 מרצה: פרופ' א. רזניקוב.

נא כתבו פיתרון סופי מפורט בטופס זה. במקרה חרום מותר להשתמש בדף נוסף המצורף בסוף הטופס. ההתייחסות למחברת היא כלטיוטה בלבד. המחברת לא תבדק.
נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

מס' שאלה	1	2	3	
ציון				

פתרון לשאלה : $\boxed{1}$

א) מוכח: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$. אם:
$U+W\subseteq V \Leftarrow \dim(U+W)\le\dim V$. מקבלים:
$\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)\ge\dim U+\dim W-\dim V>0 \Rightarrow U\cap W\ne\{0\}$.

ב) $U\cap W\subseteq U$ ו- $U\cap W\subseteq W \Leftarrow \dim U=\dim(U\cap W)+k,\ k\ge 0,\ \dim W=\dim(U\cap W)+l,\ l\ge 0$.
מקבלים: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=k+l+\dim(U\cap W)=\dim(U\cap W)+1$
בהתאם הנתון מקבלים $k=0, l=1$ או $k=1, l=0 \Leftarrow U\cap W=U$ או $U\cap W=W$
$\Leftarrow$ או $U\subseteq W$ או $W\subseteq U$.

ג) "$\Leftarrow$" יהי V עם $\dim V=n$. נבחר בסיס $\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$. נגדיר תת-מרחב
ע"י $U_i=\mathrm{Span}\{v_1,v_2,\dots,v_i\}$, $1\le i\le n$, ו- $U_0=\{0\}$. אז $U_i\subseteq U_{i+1}$ ו- $U_i\ne U_{i+1}$
כי $\dim U_i=i\ne\dim U_{i+1}=i+1$.

"$\Rightarrow$" יהי V מ"ו ו- $U_0\subsetneq U_1\subsetneq\dots\subsetneq U_n\subseteq V$ סדרה של תת-מרחב.
בגלל ש- $U_i\subsetneq U_{i+1}$ מתקיים $\dim U_i<\dim U_{i+1} \Leftarrow 1\le\dim U_{i+1}-\dim U_i \Leftarrow \dim V\ge n$.
נוכיח ש- $\dim U_{i+1}-\dim U_i=1$ אם סדרה $\{U_i\}$ היא <u>מקסימלית</u>. נניח קיים i
כך ש- $1<\dim U_{i+1}-\dim U_i$ (ברור שאפשר להניח ש- $U_n=V$ אחרת $\{U_i\}$ איננה מקסימלית)
נבחר בסיס ב-U_i $\{v_1,\dots,v_k\}\subseteq U_i$ ונשלים עד לבסיס ב- $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_m\}\subseteq U_{i+1}$
אם $m>1$ אז נגדיר תת-מרחב $U'=\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1}\}$.
מתקיים $U_i\subset U'\subset U_{i+1}$ ו- $U'\ne U_i$, $U'\ne U_{i+1}$ בגלל ש:
$\dim U_{i+1}=k+m\ne\dim U'=k+1\ne k=\dim U_i$
$\Leftarrow$ סדרה $\{U_i\}$ איננה מקסימלית כי אפשר להוסיף לה תת-מרחב U'.

פתרון לשאלה : $\boxed{3}$

א) נבחר בסיס ל- $\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq U$ ונשלים אותו

לבסיס $\{v_1,\dots,v_n,v_{n+1}\}\subseteq V$ ב-V. $\dim V=n+1$, $\dim U=n$.

נגדיר פונקציונל $\varphi:V\to F$ ע"י

$\varphi(v_i)=0$, $1\le i\le n$, $\varphi(v_{n+1})=1$. אז קיים: $\varphi\neq 0$ $\Leftarrow$

$\dim \mathrm{Im}(\varphi)\neq\{0\}$ $\Leftarrow$ $\mathrm{Im}(\varphi)=F$ $\Leftarrow$ $\dim \mathrm{Im}(\varphi)=1$

$\Leftarrow$ $\dim \mathrm{Ker}(\varphi)=n$. גם $U\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ $\Leftarrow$ $U=\mathrm{Ker}(\varphi)$ בגלל ש-$\dim\mathrm{Ker}(\varphi)=\dim U$.

ב) $u,v\in V$ בת"ל $\Leftarrow$ קיים בסיס $\{u,v,v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ $(\dim V=n+2)$

נגדיר פונקציונל $\varphi:V\to F$ ע"י

$\varphi(u)=1$

$\varphi(v)=0$

$1\le i\le n$, $\varphi(v_i)=0$

פתרון לשאלה : $\boxed{}$

א) $C\mathrm{span}A\subseteq C\mathrm{span}B$ $\Leftarrow$ כל העמודות של A הן צ"ל של העמודות של B $\Leftarrow$ קיימים סקלרים c_{ij}, $1\le i,j\le n$ כך ש:

$A^i=\sum_{j=1}^{n} c_{ji}\cdot B^j$ לכל $1\le i\le n$. אם נגדיר $C=(c_{ji})$ אז מתקיים

$A=\cancel{C}\cdot BC$.

ב) נניח בשלילה: B הפיכה $\Leftarrow$ $\mathrm{rank}B=n$! $n>\mathrm{rank}AB=\mathrm{rank}A$ בגלל ש-AB אינה הפיכה.

$\Leftarrow$ A אינה הפיכה $\Leftarrow$ $\mathrm{Null}(A)\neq\{0\}$. אבל $\mathrm{rank}B=\dim C\mathrm{span}(B)=n$ $\Leftarrow$

$C\mathrm{span}(B)=F^n$! $C\mathrm{span}B\cap \mathrm{Null}A=\mathrm{Null}A\neq\{0\}$ — סתירה.