תרגול 8

28 ביולי 2020

1 המשך בסיס ומימד

תרגילים:

1. יהי V מ"ו, W_1, W_2 ת"מ המקיימים:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

הוכיחו שאחד מהם מוכל בשני.

פתרון: נתבונן רגע ב־ W_1:

$$W_1 \cap W_2 \leq W_1 \leq W_1 + W_2$$

ולכן נקבל אי שיוויון גם במימדים:

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1) \leq \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

מימד הוא מספר טבעי (או 0), ולכן נקבל שתי אפשרויות:

א. $\dim(W_1) = \dim(W_1 \cap W_2)$, ואז "הכלה ושיוויון מימדים גורר שיוויון מרחבים", ולכן $W_1 = W_1 \cap W_2$, מה שאומר $W_1 \subseteq W_2$.

ב. $\dim(W_1) = \dim(W_1 + W_2)$, ושוב "הכלה ושיוויון מימדים גורר שיוויון מרחבים", ולכן $W_1 = W_1 + W_2$, מה שאומר $W_2 \subseteq W_1$.

2. יהא V מ"ו, $B \subseteq V$ ת"ק. הוכיחו: (B בסיס) אמ"ם ($0 \notin B$ ולכל $A \subseteq B$ מתקיים: $V = span(A) \oplus span(B \setminus A)$).

פתרון: $\Leftarrow$: נתון: B בסיס. לכן כמובן $0 \notin B$. תהי $A \subseteq B$, נוכיח: $V = span(A) \oplus span(B \setminus A)$:

ראשית, נראה $V = span(A) + span(B \setminus A)$: ידוע שסכום של נפרשים זה הנפרש ע"י האיחוד, ולכן אצלנו:

$$span(A) + span(B \setminus A) = span(A \cup (B \setminus A)) = span(B) = V$$

והשיוויון האחרון נובע מכך ש־B בסיס.

כעת, יהי $v \in span(A) \cap span(B \setminus A)$, לכן יש $v_1, \ldots, v_k \in A$ כך ש־ $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, ויש $u_1, \ldots, u_m \in B \setminus A$ כך ש־ $v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$. ונקבל:

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$$

כעת, כיון ש־B בת"ל, צ"ל של איברים שונים מ־B שנותן 0 מכריח את המקדמים להיות כולם 0. כלומר: $\forall i : \alpha_i = 0, \forall j : \beta_j = 0$, ולכן $v = 0$.

$\Rightarrow$: קל לראות ש־B פורש, כי עבור $A = B$ נקבל מהנתון: $V = span(B) \oplus span(\emptyset) = span(B)$. נותר להוכיח ש־$B$ בת"ל. נב"ש ש־B ת"ל, ולכן יש $0 \neq v \in B$ התלוי באחרים, כלומר

$$v = \sum_{u \in B \setminus \{v\}} \alpha_u u$$

כלומר $v \in span(B \setminus \{v\})$. ואז נקבל עבור $A = \{v\}$ ש־ $v \in span(A) \cap span(B \setminus A)$ בסתירה לכך שהסכום הוא ישר ולכן החיתוך מכיל רק את 0.

2 מרחבי המטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. דיברנו על שלושה מרחבי המטריצה:

- $C(A) \leq \mathbb{F}^m$, מרחב העמודות ־ המרחב הנפרש ע"י עמודות A
- $R(A) \leq \mathbb{F}^n$, מרחב השורות ־ המרחב הנפרש ע"י שורות A.
- $N(A) \leq \mathbb{F}^n$, מרחב האפס ־ מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המיוצגת ע"י A.

איך מוצאים בסיסים למרחבים אלו? מדרגים את המטריצה, ואז:

- העמודות ב־A המתאימות לעמודות ציר (עמודות שיש בהן משתנה מוביל) מהוות בסיס למרחב העמודות.
- השורות השונות מאפס בצורה המדורגת מהוות בסיס למרחב השורות.
- "הפתרונות היסודיים" של המערכת מהווים בסיס למרחב האפס.

דרגת המטריצה: $rank(A) = \dim C(A) = \dim R(A)$.

משפט הדרגה: $\dim N(A) + rank(A) = n$.

תרגילים:

1. מצאו בסיסים למרחבי המטריצה של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

פתרון: נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$C(A) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R(A) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A) = \left\{ t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נגדיר $B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} A \\ A^t \end{pmatrix}$. הוכיחו או הפריכו:

(א) $\forall A : rank(A) = rank(B)$

(ב) $\forall A : rank(A) = rank(C)$

(ג) $\exists A : rank(C) = 2rank(A)$

(ד) $\exists A : rank(C) > 2rank(A)$

פתרון: א. הוכחה: כשלב ראשון של דירוג אפשר לחסר באופן הבא: $\forall 1 \leq i \leq n : R_{n+i} - R_i \to R_{n+i}$, ונוקבל n שורות אפסים. לכן מספר השורות בת"ל ב־B יהיה כמספר השורות בת"ל ב־A, ולכן הדרגות שוות.

הפרכת ב והוכחת ג: ניקח $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז נקבל $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ומקבלים $rank(C) = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot rank(A)$.

ד. הפרכה: נניח ב- A יש k שרות בת"ל, אז גם ב-A^t יש k שורות בת"ל, כי $\dim C(A) = \dim R(A)$. ולכן בסה"כ במטריצה C יש לכל היותר $2k$ שורות בת"ל (שימו לב שלפעמים יהיה פחות, כי חלקן אולי תלויות בשורות A). לכן $rank(C) \leq 2rank(A)$.

3. הוכיחו: כל מטריצה לא ריבועית איננה הפיכה.

נב"ש הפיכה. ניזכר בהגדרה: $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ הפיכה אם יש B כך ש- $AB = I_m$ וכן יש C כך ש- $CA = I_n$. כעת כיון שהיא לא ריבועית אז $m < n \vee m > n$. אם $m < n$, לכן

$$rank(I_n) = rank(CA) \leq rank(A) \leq m < n$$

בסתירה. אם $m > n$ אז

$$rank(I_m) = rank(AB) \leq rank(A) \leq n < m$$

בסתירה.

4. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המקיימות: $rank(A) + rank(B) > n$. הוכיחו: $AB \neq 0$.

פתרון: נב"ש $AB = 0$. נשים לב שלפי כפל עמודה:

$$\forall i : C_i(AB) = AC_i(B) = 0$$

לכן $\forall i : C_i(B) \in N(A)$, ומכאן $C(B) \subseteq N(A)$. עכשיו נשתמש במשפט הדרגה:

$$n = rank(A) + \dim N(A) \geq rank(A) + \dim C(B) = rank(A) + rank(B) > n$$

בסתירה.

5. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & * & 1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}$, כך שקיימים 2 פתרונות בת"ל למערכת $Ax = 0$. ממצאו את A.

פתרון: 2 פתרונות בת"ל למערכת אומר ש- $\dim N(A) \geq 2$, אבל כיון ש- $A \neq 0$ נקבל $\dim N(A) = 2$, ולכן $rank(A) = 1$, ולכן כל השורות כפולות אחת של השנייה, ואצלנו זה אומר $* = 1$.

6. השלימו את קבוצת הוקטורים (נתון בת"ל) הבאה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

לבסיס של $\mathbb{C}^4$.

פתרון: נשים אותן בשורות מטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 3 & 0\\ 2 & 1-i & 2+i & 5\end{pmatrix}$$

נדרג, ונוסיף שורות בת"ל בהתאם:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 3 & 0\\ 2 & 1-i & 2+i & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-(1-i)R_1\to R_2}\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1+4i & 5\end{pmatrix}$$

כעת "קל לראות" ש e_2,e_4 בת"ל עם השורות במדורגת, ולכן בת"ל גם עם שני הוקטורים המקוריים (כי מרחב השורות נשמר בדירוג), ולכן הבסיס:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1+i\\ 1\\ 3\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2\\ 1-i\\ 2+i\\ 5\end{pmatrix},e_2,e_4\right\}$$