אינפי 4 : תרגול 6

3 במאי 2016

שטח של משטח ב־$\mathbb{R}^n$

תהי $D \subset \mathbb{R}^k$ $(1 \le k \le n-1)$ קבוצה פתוחה ו־$\phi : D \to \mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות וחד חד ערכית בעלת נגזרת עם דרגה מקסימלית בכל נקודה ב־D, אז השטח של המשטח ה־k מימדי $\Gamma = \mathrm{image}(\phi)$ נתון לפי:

$$S(\Gamma) = \int_D \left(\det D_\phi(u)^T D_\phi(u)\right)^{\frac{1}{2}} du$$

הערה: הנגזרת $\phi'(u) = D_\phi(u)$ היא מטריצה מגודל $n \times k$ ולכן $D_\phi(u)^T$ היא מטריצה מגודל $k \times n$. לכן $A = D_\phi(u)^T D_\phi(u)$ היא מטריצה ריבועית מגודל $k \times k$ וכמו כן קל לבדוק ש־A היא מטריצה חיובית לחלוטין ולכן ניתן לקחת שורש על הדטרמיננטה של A בהגדרת האינטגרל שנותן את השטח של Γ.

דוגמא: חשבו את השטח של הטורוס השטוח הדו־מימדי $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$.

פתרון: נגדיר העתקה $\phi : (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ לפי

$$\phi(u,v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v).$$

נשים לב ש־ϕ מעתיקה את התחום שלה על הטורוס $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ חוץ מקבוצה ממימד אחד ולכן השטח של התמונה של ϕ יהיה שווה לשטח של טורוס זה. כמו כן

$$D_\phi(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}, (u,v) \in (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi),$$

לכן ל־D_ϕ יש דרגה מקסימלית בכל נקודה בתחום של ϕ ו־

$$\left(D_\phi(u,v)\right)^T D_\phi(u,v)$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

לכן $\det\left(D_\phi(u,v)\right)^T D_\phi(u,v) = 1$ לכל $(u,v) \in (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$ ולכן מנוסחת השטח נקבל

$$S\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dudv = 4\pi^2.$$

<u>דוגמא</u>: מצאו את שטח המשטח המתקבל מחיתוך המשטחים

$$x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ ו־ } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

והנמצא בין העל מישורים $x_4 = 0$ ו־$x_4 = 1$.

<u>פתרון</u>: נציב את הזהות $x_3 = -x_1 - x_2$ במשוואה הריבועית ונקבל

$$\begin{aligned} x_4^2 &= x_1^2 + x_2^2 + (x_1+x_2)^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &= \frac{3}{2}(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2. \end{aligned}$$

לכן אם נסמן

$$\sqrt{\frac{3}{2}}(x_1+x_2) = r\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2) = r\sin\theta$$

נקבל את הפרמטריזציה

$$\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_1 = \frac{r}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ x_2 = \frac{r}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ x_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}r\cos\theta \\ x_4 = r \end{pmatrix}, (r,\theta) \in (0,1)\times(-\pi,\pi).$$

לכן הנגזרת של ϕ היא

$$D_\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & -\frac{r}{\sqrt{6}}\sin\theta + \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & -\frac{r}{\sqrt{6}}\sin\theta - \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta & \sqrt{\frac{2}{3}}r\sin\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

קל לבדוק של־D_ϕ יש דרגה מקסימלית לכל נקודה (r,θ) בתחום $(0,1)\times(-\pi,\pi)$ ועל ידי חישוב ישיר מקבלים

$$D_\phi(r,\theta)^T D_\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

לכן

$$\left(\det D_\phi(r,\theta)^T D_\phi(r,\theta)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}r.$$

לבסוף מהנוסחא לחישוב שטח של משטח נקבל שהשטח המבוקש הוא

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2} r d\theta dr = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 r dr = 2\sqrt{2}\pi \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{r=1} = \sqrt{2}\pi.$$

אינטגרל מסוג ראשון על משטח ב־$\mathbb{R}^n$

הגדרה: תהי $D \subset \mathbb{R}^k$ $(1 \leq k \leq n-1)$ קבוצה פתוחה ו־$\phi : D \to \mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות וחד חד ערכית בעלת נגזרת עם דרגה מקסימלית בכל נקודה ב־D. נסמן ב־$S = \phi(D)$ את התמונה של ϕ ותהי $f : S \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על S, אז האינטגרל המשטחי (או אינטגרל מסוג ראשון) של f על S נתון לפי

$$\int_S f dS = \int_D f(\phi(u)) \left(\det D_\phi(u)^T D_\phi(u)\right)^{\frac{1}{2}} du.$$

דוגמא: חשבו את האינטגרל של $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ על המשטח $|x| + |y| + |z| = 1$.

פתרון: כיוון שהפונקציה f והמשטח בנתון סימטריים ביחס לראשית הצירים מספיק לחשב את האינטגרל של f על התחום $x, y, z \geq 0$ ולהכפיל ב־8. לכן עלינו לבצע אינטגרציה על המשטח

$$x + y + z = 1, x, y, z \geq 0.$$

כיוון ש־$z \geq 0$ ו־ $z = 1 - x - y$ נדרוש ש־$1 - x - y \geq 0$ או $y \leq 1 - x$. לכן נקבל פרמטריזציה למשטח לפי

$$\phi(x,y) = (x, y, 1-x-y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x.$$

ע"י חישוב נקבל ש־

$$D_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ו־

$$D_\phi(x,y)^T D_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

לכן $\left(\det D_\phi(x,y)^T D_\phi(x,y)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ ולכן האינטגרל של f על המשטח $|x|+|y|+|z|=1$ נתון לפי

$$\int_{|x|+|y|+|z|=1} f(x,y,z)dS = 8\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2+(1-x-y)^2)\sqrt{3}dydx$$

$$= 8\sqrt{3}\int_0^1 \left(yx^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= 8\sqrt{3}\int_0^1 \left((1-x)x^2 + \frac{2}{3}(1-x)^3\right)dx = 8\sqrt{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}(1-x)^4\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= 8\sqrt{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 2\sqrt{3}.$$

אינטגרל מסוג שני על היפר־משטח ב־$\mathbb{R}^n$

<u>הגדרה</u>: יהי M היפר־משטח ב־$\mathbb{R}^n$ שהוא התמונה של הפונקציה

$$\phi : D \to M, \phi = \phi(u) = \phi(u_1, ..., u_{n-1})$$

שגזירה ברציפות וחד חד ערכית עם נגזרת בעלת דרגה מקסימלית בכל נקודה ב־D כאשר $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ היא קבוצה פתוחה. אז נורמל היחידה $\widehat{n}$ למשטח M בנקודה $x = \phi(u)$ מוגדר כ־$\widehat{n} = \frac{n}{||n||}$ כאשר

$$n = \pm \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_n \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u) & ... & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1}(u) \\ .... & & & \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u_{n-1}}(u) & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_{n-1}}(u) & ... & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_{n-1}}(u) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

באופן שקול, אם המשטח M נתון כאוסף פתרונות המשוואה $F(x) = 0$ כאשר F היא פונקציה סקלרית שגזירה ברציפות כך ש־$\nabla F(x) \neq \bar{0}$ לכל נקודה $x \in M$, אז $\widehat{n} = \pm\frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$.

<u>הערה</u>: נורמל היחידה $\widehat{n}$ להיפר־משטח M נקבע עד כדי סימן. בפועל $\widehat{n}$ יקבע באופן חד־ערכי כאשר ניקח את נורמל היחידה החיצוני או את נורמל היחידה

הפנימי. את המושגים נורמל חיצוני ונורמל פנימי נבין באופן אינטואיטיבי כי לא תמיד המשטחים שנעבוד איתם יהיו סגורים. במקרה הספציפי ש־$M = \partial G$ כאשר $G = \{x : F(x) < C\}$ אז הנורמל החיצוני ל־M יוגדר כ־$\widehat{n} = \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$.

<u>הגדרה</u> (של אינטגרל משטחי מסוג שני): יהי M היפר־משטח ב־$\mathbb{R}^n$ ו־: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ פונקציה הרציפה על M, אז האינטגרל של F על M מוגדר כ־

$$flux_F(M) = \int_M \langle F, N \rangle dS \tag{2}$$

כאשר N הוא נורמל היחידה של M.

<u>הערה</u>: האינטגרל (2) נקבע עד כדי סימן של פלוס או מינוס כי את נורמל היחידה ניתן לבחור עד כדי סימן. כאשר דורשים לחשב אינטגרל זה בפועל אז גם נותנים את הכיוון של נורמל היחידה (בדר"כ נתון אם נורמל היחידה הוא חיצוני או פנימי במידה ויש לכך משמעות). כמו כן לאינטגרל זה קוראים השטף של F דרך M לכיוון N (כי מבחינה פיסיקלית הוא מתאר את זרימת השטף F על המשטח M), לכן מסמנים אותו כ־$flux_F(M)$.

<u>דוגמא</u>: חשבו את האינטגרל $\int_M \langle F, N \rangle dS$ כאשר $F = (x^2, y^2, z^2)$ ו־

$$M = \{x^2 + y^2 = z^2, 1 \le z \le 2\}$$

ו־N נורמל יחידה חיצוני ל־M.

<u>פתרון</u>: קודם נחשב את נורמל היחידה החיצוני ל־M בעזרת הפרמטריזציה

$$\phi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right), 1 \le x^2 + y^2 \le 4.$$

לכן

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

נשים לב שהמשטח M הוא חלק מהחרוט העליון $z^2 = x^2 + y^2, z \ge 0$, לכן הנורמל החיצוני ל־M "מסתכל למעטה" ולכן נבחר את n עם סימן מינוס. לכן נקבל בסוף ש־

$$N = -\frac{n}{||n||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right).$$

כעת נחשב את אלמנט השטח dS. כיוון ש־

$$D_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

נקבל

$$D_\phi(x,y)^T D_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1+\frac{x^2}{x^2+y^2} & \frac{xy}{x^2+y^2} \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & 1+\frac{y^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

לכן

$$\det D_\phi(x,y)^T D_\phi(x,y) = \left(1+\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(1+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) - \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2$$

ומכאן נקבל ש־$dS = \sqrt{2}dxdy$. כעת נוכל לחשב את האינטגרל

$$\int_M \langle F, N\rangle dS = \int_{1\le x^2+y^2\le 4} \left\langle \left(x^2, y^2, z^2(x,y)\right), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)\right\rangle dxdy$$

$$= \int_{1\le x^2+y^2\le 4} \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - z^2(x,y)\right) dxdy$$

$$= \int_{1\le x^2+y^2\le 4} \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2 - y^2\right) dxdy.$$

כעת נבצע את החלפת המשתנים $dxdy = rd\theta dr, x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$:

$$\int_M \langle F, N\rangle dS = \int_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{r^3\cos^3\theta}{r} + \frac{r^3\sin^3\theta}{r} - r^2\right) rd\theta dr$$

$$= \int_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{r^3\cos^3\theta}{r} + \frac{r^3\sin^3\theta}{r} - r^2\right) rd\theta dr.$$

כעת נחשב בנפרד

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3\theta d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \left(3\sin\theta - \sin(3\theta)\right) d\theta = 0$$

כי האינטגרציה היא על קטע סימטרי והפונקציות בתוך האינטגרל הן אי־זוגיות. באותו אופן מראים ש־$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3\theta d\theta = 0$. לכן בסוף נקבל ש־

$$\int_M \langle F, N\rangle dS = \int_1^2\int_{-\pi}^{\pi} -r^3 d\theta dr = -2\pi\int_1^2 r^3 dr$$

$$= -2\pi\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=1}^{r=2} = -\frac{15\pi}{2}.$$

<u>הערה</u>: תהי $\phi : D \to M$ פרמטריזציה למשטח M ונניח ש־n הוא נורמל ל־M המוגדר לפי נוסחא (1) בנקודה $y = \phi(x) \in M$, אז

$$n(\phi(x)) = \sqrt{\det D_\phi(x)^T D_\phi(x)}N(\phi(x)).$$

לכן נקבל נוסחא פשוטה לחישוב אינטגרל משטחי מסוג שני:

$$\int_M \langle F, N\rangle dS = \int_D \langle F\circ\phi, n\circ\phi\rangle dD.$$

<u>דוגמא</u>: חשבו את האינטגרל $\int_M \langle F, N\rangle dS$ כאשר

$$F(x,y,z) = (-2y, x, 1), M = \{(x,y,z) : z = 8 - 2x^2 - 4y^2, z \geq 4\}$$

ו־N נורמל יחידה חיצוני ל־M.

<u>פתרון</u>: כיוון ש־$z \geq 4$ נדרוש ש־$2x^2 + 4y^2 \leq 4$ או $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$. לכן נקבל פרמטריזציה ל־$M$ לפי

$$\phi(x,y) = (x, y, 8 - 2x^2 - 4y^2), \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1.$$

לכן

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -4x \\ 0 & 1 & -8y \end{vmatrix} = (4x, 8y, 1).$$

הוקטור n הוא אכן נורמל חיצוני ל־M כי הוא "מסתכל למעלה", לכן נקבל ש־

$$\int_M \langle F, N\rangle dS = \int_{\frac{x^2}{2}+y^2\leq 1} \langle F\circ\phi, n\circ\phi\rangle dxdy$$

$$= \int_{\frac{x^2}{2}+y^2\le 1} \langle(-2y,x,1),(4x,8y,1)\rangle dxdy = \int_{\frac{x^2}{2}+y^2\le 1} dxdy = \sqrt{2}\pi$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך שלאליפסה עם צירים a ו־b יש שטח $\pi \cdot a \cdot b$.

<u>דוגמא</u>: חשבו את האינטגרל $\int_S \langle F,N\rangle ds$ כאשר

$$F(x,y,z) = \left(x^3,y^3,z^3\right), S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$$

ו־N הוא נורמל יחידה חיצוני.

<u>פתרון</u>: נעשה פרמטריזציה ל־S לפי

$$\phi(\theta,\psi) = (R\cos\theta\sin\psi, R\sin\theta\sin\psi, R\cos\psi), (\theta,\psi) \in (-\pi,\pi)\times(0,\pi).$$

לכן

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R\sin\theta\sin\psi & R\cos\theta\sin\psi & 0 \\ R\cos\theta\cos\psi & R\sin\theta\cos\psi & -R\sin\psi \end{vmatrix}$$

$$= (-R^2\cos\theta\sin^2\psi, -R^2\sin\theta\sin^2\psi, -R^2\cos\psi\sin\psi).$$

כיוון ש־n הוא נורמל חיצוני נבחר אותו עם סימן הפלוס. לכן

$$\int_S \langle F,N\rangle dS = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \Big\langle (R^3\cos^3\theta\sin^3\psi, R^3\sin^3\theta\sin^3\psi, R^3\cos^3\psi),$$

$$(R^2\cos\theta\sin^2\psi, R^2\sin\theta\sin^2\psi, R^2\cos\psi\sin\psi)\Big\rangle d\theta d\psi$$

$$= R^5 \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi (\cos^4\theta\sin^5\psi + \sin^4\theta\sin^5\psi + \cos^4\psi\sin\psi) d\theta d\psi$$

כעת נחשב בנפרד

$$\int_0^\pi \cos^4\psi\sin\psi d\psi = -\frac{1}{5}\int_0^\pi (\cos^5\psi)' d\psi = -\frac{1}{5}\cos^5\psi\Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi} = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^\pi \sin^4\theta d\theta = \int_{-\pi}^\pi \cos^4\theta d\theta = \frac{1}{8}\int_{-\pi}^\pi (3+4\cos(2\theta)+\cos(4\theta))d\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\int_0^\pi \sin^5\psi d\psi = \frac{1}{16}\int_0^\pi (10\sin\psi - 5\sin(3\psi) + \sin(5\psi))d\psi$$

$$\frac{1}{16}\left(-10\cos\psi+\frac{5}{3}\cos(3\psi)-\frac{1}{5}\cos(5\psi)\right)\Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi}=\frac{16}{15}.$$

לכן אם נציב זהויות אלו באינטגרל נקבל

$$\int_S \langle F,N\rangle dS = R^5\left(\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{16}{15}+\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{12\pi R^5}{5}.$$