לכסון אורתוגונלי

הגדרה. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$, אז המטריצה הצמודה ל-A היא $A^* = \bar{A}^t$

הערה. מתקיים $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$

הגדרה.

1. מטריצה ריבועית A נקראת צמודה לעצמה אם $A = A^*$ נשים לב שמעל $\mathbb{R}$ זה שקול למטריצה סימטרית ועל $\mathbb{C}$ היא נקראת הרמיטית
2. מטריצה נורמלית היא מטריצה המקיימת $AA^* = A^*A$
3. מטריצה מרוכבת המקיימת $A^* = A^{-1}$ (כלומר $AA^* = A^*A = I$) נקראת מטריצה אוניטרית.
4. מטריצה ממשית המקיימת $A^t = A^{-1}$ (כלומר $AA^t = A^tA = I$) נקראת מטריצה אורתוגונלית.

תרגיל. עבור אילו ערכי $a, b \in \mathbb{C}$ המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix}$ היא הרמיטית?

פתרון. מטריצה הרמיטית מקיימת $A = A^* = \overline{A^t}$ ולכן צריך להתקיים

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2a & a \\ i & 1 & a \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} a & 0 & i \\ 0 & 2a & 1 \\ b & a & a \end{pmatrix}}$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{a} = 1, b = \overline{i}$$
$$\Downarrow$$
$$a = 1, b = -i$$

הערה. תכונות של מטריצה אוניטרית

1. A מטריצה אוניטרית אם ורק אם שומרת מכפלה פנימית, כלומר

   $$\forall x, y : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$$

   אם ורק אם Aאוניטרית.
2. A מטריצה אוניטרית אם ורק אם היא שומרת על נורמה כלומר

   $$\forall v : \|Av\| = \|v\|$$

   כתוצאה מכך, ערך מוחלט של כל ערך עצמי שלה הוא 1.

3. אם A אוניטרית אז $A^*, \bar{A}$ גם הן אוניטריות.

4. מטריצה A מעל שדה היא אוניטרית אם ורק אם שורותיה(עמודותיה) הן בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית בו.

הגדרה. תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, אומרים שהן דומות אורתוגונלית (אוניטרית) ל-B אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית (אוניטרית) המקיימת

$$B = P^{-1}AP (= P^*AP)$$

הגדרה. תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, אומרים ש-A לכסינה אורתוגונלית (אוניטרית) אם קיימת מטריצה P אורתוגונלית (אוניטרית) ו-D אלכסונית המקיימות

$$D = P^{-1}AP (= P^*AP)$$

משפט. A לכסינה אורתוגנלית אם ורק אם A סמטרית.

הערה. כזכור עמודות המטריצה המלכסנת (בלכסון רגיל) הן הבסיסים של המרחבים העצמים, כדי לבצע ליכסון אורתוגונלי יש לבצע תהליך גרם שמידט על כל אחד מהבסיסים של המרחבים העצמים.

תרגיל. לכסן אורתוגונלית את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$, מצא את P אורתוגונלית ו-D אלכסונית המקיימת $D = P^{-1}AP$

פתרון. הפולינום האופייני של המטריצה הוא

$$P_A(\lambda) = \left| \lambda I - \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 18)^2 (\lambda - 27)$$

המרחבים העצמים הם

- $\lambda = 18$

$$V_{\lambda=18} = N\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

- $\lambda = 27$

$$V_{\lambda=27} = N\left(\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

כלומר אם היינו צריכים ליכסון רגיל אז המטריצה המלכסנת היתה פשוט

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ובנוסף נשים לב שווקטורים ממרחבים עצמיים שונים הם אורתוגונלים (רק כאשר A סמטרית) כלומר

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

לכן למעשה יש לבצע את גרם שמידט רק עבור המרחב העצמי $V_{\lambda=18}$ו-

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ולסיום צריך לנרמל את הווקטורים, וכעת יש לנו מטריצה אורתוגנלית $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4.5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4.5}} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4.5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

המקיימת

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = P^t AP$$