מצויינת

ב"ה

פתרון תרגיל 8 (סדרות וטורים של פונקציות)

(1) תחום התכנסות, סוגה והפונקציה הגבולית:

א. $f_n(x)=\cos^n x$ תחום ההתכנסות: $\mathbb{R}$, סוג ההתכנסות לא במ"ש.

הוכחה: בתחום $-\pi+k\pi<x<k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

בנקודה $x=k\pi$ $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

$f_n(x)$ סדרת פונק' רציפות, אם הן מתכנסות במ"ש ל-$f(x)$ אזי עפ"י משפט $f(x)$ פונק' רציפה. בסתירה.

ב. $f_n(x)=\frac{\text{arctg}\, x}{n}$ בתחום $[-\pi/2,\pi/2]$. תחום ההתכנסות כל התחום, מתכנסת במ"ש:

פונקציה גבולית $f(x)=0$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ מתקיים $f_n(x)=\frac{\text{arctg}\, x}{n}<\frac{\pi}{2n}$. נגדיר $N=\frac{\pi}{2\varepsilon}$. לכל $n>N$

$\left|\frac{\text{arctg}\, x}{n}\right|<\left|\frac{\pi}{2n}\right|<\frac{\pi/2\cdot\varepsilon}{\pi/2}=\varepsilon$ ולכן $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ במ"ש.

ג. $f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n^2}$.

השערה $f(x)=|x|$.

$\underline{x>0}$ $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-x=\left(\sqrt{x^2+1/n^2}-x\right)\frac{(\sqrt{\quad}+x)}{(\sqrt{\quad}+x)}=$

$=\frac{1/n^2}{\sqrt{\quad}+x}\le\frac{1/n^2}{x}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\underline{x<0}$ $(\sqrt{\quad}-x)=\frac{1/n^2}{(\sqrt{\quad}-x)}\le\frac{1/n^2}{x}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\underline{x=0}$ $f_n(0)=1/n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\left|\sqrt{\quad}-|x|\right|=\frac{1/n^2}{(\sqrt{\quad}+|x|)}\le\frac{1/n^2}{\sqrt{1/n^2}}=1/n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

ההתכנסות היא במ"ש.

ד. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$.

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}[x^n-x^{2n}]=0 \Rightarrow f(x)=0$

$\sup_{0\le x\le1}[(x^n-x^{2n})-0]=1/4$

הוכחה: נבחר סדרה $x_n=\sqrt[n]{1/2}$

$x_n^n=1/2$ ולכן $f_n(x_n)=1/2-1/4=1/4$

אין התכנסות במ"ש בתחום.

ה. $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ כאשר $x>0$ $\lim f_n(x)=0 \Leftarrow f(x)=0$. אין התכנסות במ"ש

ב-$(0,1)$: $f_n(1/n)=\frac{1}{\frac{n}{n}+1}=1/2$. לעומת זאת ב- $[\varepsilon,1]$ יש: לכל n, $\varepsilon\le x$:

$0\le f_n(x)=\frac{1}{nx+1}\le\frac{1}{n\varepsilon+1} \Leftarrow \sup|f_n(x)|\le\sup\left|\frac{1}{n\varepsilon+1}\right|\to0$

(2) דוגמה נגדית: $f_n(x)=\frac{1}{n}\xrightarrow[\text{במ"ש}]{}0$ $g_n(x)=1/x\xrightarrow[\text{במ"ש}]{}1/x$ $\frac{1}{n}<x\le1$

$f_n\cdot g_n=\frac{1}{nx}$ $f=\begin{cases}0 & 1/n<x\le1\\ 1 & x=1/n\end{cases}$

$f_n\cdot g_n$ פונק' רציפות אך f אינה רציפה, לכן לא במ"ש.

(3) דוגמה נגדית: $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ $0\le x\le1$. פונק' הגבול $f(x)=0$.

$0<x<1 \Rightarrow 0<x^n(1-x^n)<x^n\to0$, $f_n(0)=f_n(1)=0$ $\forall n$

ק התכנסות במ"ש: נמצא x_n כך ש $f_n(x_n)\not\to 0$. ונבחר $x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f_n(x_n) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = 1/4$

שמתנאי-מתקיים:

$$\int_0^x (t^n - t^{2n})\,dt = \left(\frac{1}{n+1}t^{n+1} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)\Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x f_n(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x f_n(t)\,dt\right| \le \sup_{x\in[0,1]} \left(\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| + \left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \to 0$$

התכנסות במ"ש.

(4) נתבונן בטור $\frac{1-x}{1+x}$. עבור $0<x$ $-1<\frac{1-x}{1+x}<1$ והטור $\sum\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n$ מתכנס כטור גיאומטרי.

הטור המקורי מקיים $\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right| \le \left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n$ ולכן גם שלנו מתכנס בהחלט.

עבור $x<0$ $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$ ואין התכנסות בהחלט ובתנאי (קושי $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=L>1$).

ועבור $x=0$ $\sum\frac{(-1)^n}{2n-1}$ מתכנס בתנאי (לייבניץ)

(5)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{1+x^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} 0 & |x|>1 \\ |x| & |x|<1 \\ 1/2 & x=1 \\ \text{לא מוגדר} & x=-1 \end{cases} < 1 \quad \text{עבור } x\neq -1$$

ולכן ל $x\neq-1$ ישנה התכנסות בהחלט (דלמבר)

(6) א. זהו טור לייבניץ לכן ישנה התכנסות בתנאי.

$\sup_{0\le x\le 2\pi}|S_N(x)-S(x)| = ?$

$|S_N(x)-S(x)| \le |S_N(x)-S_{N-1}(x)| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+\sin x}\right| \le 1/n \to 0$ וישנה התכנסות במ"ש.

(טור לייבניץ לכן S_N סדרה עולה ל-S, לכן לכל N $S_N\le S$).

ב. נראה כי קיימים M_n כך ש: $|f_n(x)|<M_n$ לכל x בתחום ו $\sum M_n<\infty$ ומכאן התכנסות במ"ש.

(נמצא מקסימום:) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$, $f_n'(x) = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}$.

$f_n'(x_n)=0 \iff 1-n^4x_n^2=0 \iff x = 1/n^2$

$M_n = \sup_{x\ge 0}|f_n(x)| = f_n(x_n) = \frac{1/n^2}{1+n^4(\frac{1}{n^2})^2} = 1/2n^2 = M_n$ ומכאן התכנסות במ"ש $\sum M_n<\infty$

(8) תנאי רציפות

$u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \Rightarrow u_n'(x) = -\frac{n\sin(nx)}{n^\alpha}$

מינוי $x=\pi/2$ מתקיים $\left|\frac{\cos(n\pi/2)}{n^\alpha}\right| \le 1/n^\alpha$. $\sum 1/n^\alpha$ מתכנס עבור $\alpha>2$ ובפרט ווירשטרס גם שלנו מתכנס.

מתקיים $\left|\frac{n\sin(nx)}{n^\alpha}\right| \le \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ $(\alpha-1\ge 2)$ $\sum 1/n^{\alpha-1}$ מתכנס ולכן $\sum\frac{n\sin(nx)}{n^\alpha}$ מתכנס במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

$u_n(x)$ מוגדרת ב-$\mathbb{R}$, בעלת נגזרת רציפה ולכן, $\sum u_n$ מתכנס, $\sum u_n'(x) \xrightarrow{\text{במ"ש}} u'$ ב-$\mathbb{R}$. $\Leftarrow \sum u_n(x)$

ב2 מתוך 8