6.12.15

תורת הקבוצות
תרגול 7

תרגיל: תהיה $f: On \to On$ פונקציה מונוטונית ורציפה.
הוכח שלכל $\alpha \in On$ יש $\beta \geq \alpha$ כך ש- $f(\beta)=\beta$

הוכחה: יהיה $\alpha \in On$. אם $f(\alpha)=\alpha$ סיימנו.
אחרת $f(\alpha)>\alpha$.
[בהסבר - אחרת נקבל $f(\alpha)<\alpha$ ולכן $f(f(\alpha))<f(\alpha)$ ונקבל סדרה אינסופית יורדת ב-α].
אם $f(f(\alpha))=f(\alpha)$ סיימנו.
אחרת $f(f(\alpha))>f(\alpha)$ נמשיך ונקבל סדרה עולה.
$f^n(\alpha)\geq f^{(n-1)}(\alpha)$ כאשר $f^n(\alpha)=\underbrace{f(f\ldots f}_{n \text{ פעמים}}(\alpha))$
אם יש n כך ש- $f^n(\alpha)=f^{n-1}(\alpha)$ וניקח $\beta=f^{(n-1)}(\alpha)$ וסיימנו.
אחרת נקבל סדרה עולה ממש ונגדיר את $\beta=\lim_{n\to\infty} f^n(\alpha)$.
β גבולי, כי אמרנו שגבול של סדרה עולה הוא גבולי...
ואז $f(\beta)=f(\lim_{n\to\infty} f^n(\alpha)) \underset{\text{משאנ}}{=} \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(\alpha)=\beta$

כנדרש!

משאר קודם. (תת קבוצה קופינאלית...)

מש!

דוגמא: (כמינו קודם...)
מצאנו מספר α כך ש- $\omega^\alpha=\alpha$.
זה מתאים לפונקציה $f(\alpha)=\omega^\alpha$.

מסקנה: אוסף נק' השבת של- קופינאלי ב- On!

תרגיל: הוכח באמצעות A.C שלכל קבוצה אינסופית יש תת קבוצה בת מנייה.

פיתרון: תהיה A קבוצה אינסופית.

נבנה $f: \omega \to A$ שתהיה חח"ע.

נבחר $a \in A$, ונגדיר $f(0)=a$

באינדוקציה על n. נניח שבחרנו $f(0) \dots f(n-1)$

ונסתכל על $A \setminus \{f(0) \dots f(n-1)\} \neq \emptyset$ כיוון ש- A אינסופית!

ונבחר בו איבר כלשהו $b \in A \setminus \{f(0) \dots f(n-1)\}$

ונגדיר $f(n) = b$. כדרוש! מש"ל!

מסקנה: קבוצה בת מנייה ניתן לסדר בסדר שלם גם טוב!

עיקרון הסדר הטוב, לפי הסדר שמושרה מ- ω.

בגלל שהיא בת מנייה יש פונקציה $f: \omega \to A$ חח"ע ועל.

ונסדר את A לפי הסדר של ω.

תרגיל: תהיה A קבוצה של קטעים במישור.

הוכח שיש $B \subseteq A$ כך ① שכל שני קטעים ב- B

חיתוכם ריק, ② וכל קטע אחר ב- A נחתך עם איזשהו

קטע מ- B באופן לא ריק..

פיתרון: מחפשים קבוצה B שתהיה מקסימלית ביחס לתכונה ①

מהמקסימליות נקבל את ②.

קודם נראה שאוסף הקבוצות B כך שמקיימות את ①

היא אוסף לא ריק. למשל קבוצה ריקה או עם קטע אחד...

[נזכיר אח"כ למה האוסף הוא קבוצה].

ונסמן $C =$ אוסף כל הקבוצות B עם תכונה ①.

$C \neq \emptyset$. המטרה היא להוכיח שקיים איבר מקסימלי ב- C.

[C קבוצה שמתקיימת ההפרדה בהינתן ש- A קבוצה

אז $P(A)$ קבוצה, ~~...~~ A קבוצה כתת

קבוצה של $P(\mathbb{R})$. בשאלה היא - האם $\mathbb{R}$ קבוצה?]

מהלמה של צורן מספיק לבדוק שלכל שרשרת יש חסם עליון.

תהי $\emptyset \neq D \subseteq C$ שרשרת. נסתכל על $E = \cup D$.

נראה $E \in C$. כלומר נראה ש-E מקיימת את (1)

יהיו $I_1, I_2 \in E$ לכן קיימים m, n (טבעיים) כך ש-$I_1 \in D_n$

וגם $I_2 \in D_m$, בה"כ $n \geq m$ ולכן $D_m \subseteq D_n$.

$\Rightarrow I_1, I_2 \in D_n$. אבל D_n מקיימת את תכונה (1)

כלומר כל שני קטעים ב-D_n נחתכים בחיתוך ריק $\Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

לכן יש איבר מקסימלי

<u>מ.ש.ל</u>!

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שהלמה של צורן שקולה לאקסיומת הבחירה:

לכל S <u>קבוצה</u> לא ריקה של קבוצות לא ריקות <u>וזרות בזוגות</u>, קיימת $A \subseteq \cup S$ כך שלכל $X \in S$ מתקיים $|A \cap X| = 1$ - A נקראת הקבוצה הבוחרת.

<u>פתרון</u>: ($\Leftarrow$) יש $f: S \to \cup S$ כך שלכל $x \in S$ $f(x) \in S$. נגדיר $A = \operatorname{Im} f$.

נוכיח שלכל $X \in S$ $|A \cap X| = 1$.

$|A \cap X| \geq 1$ כי $f(X) \in A \cap X$.

נניח שיש $Y \neq X$ כך, ש-$f(Y) \in X$.

אבל $f(Y) \in Y$ מאקסיומת הבחירה <u>שקולה</u> למקרה בו X, Y זרות. ולכן סתירה!

לכן $|A \cap X| = 1$.

($\Rightarrow$) תהי S קבוצת קבוצות. נגדיר $\tilde{S} = \{X \times \{X\} / X \in S\}$. $\tilde{S}$ קבוצת קבוצות <u>זרות בזוגות</u>. יש A כך ש-$|A \cap X \times \{X\}| = 1$

לכן <u>לכל</u> $X \in S$ $A \cap X \times \{X\} = \{(a, X)\}$ עבור $a \in X$.

נגדיר $f: S \to \cup S$ ע"י $f(X) = a$ עבור ה-a שמצאנו לעיל. וזו בדיוק פונקציית הבחירה!

<u>כנדרש</u>! <u>מ.ש.ל</u>!

תורת הקבוצות האקסיומטית

1 (1) אקסיומת הקיום

קיימת קבוצה ריקה ובפרט קבוצה: $\exists A: (\forall x: \neg(x\in A))$

2 (2) אקסיומת היחידות (או השוויון).

אם A,B קבוצות, אזי $A=B \iff A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$.

כלומר $\forall A\,\forall B: ((A=B)\leftrightarrow \forall a((a\in A)\leftrightarrow(a\in B)))$

תרגיל: א. אם $A\neq B$ אז קיים $a\in A$ כך ש- $a\notin B$ או $b\in B$ כך ש- $b\notin A$.

ב. $a\notin A \leftrightarrow a\notin B \Rightarrow A=B$.

פתרון: א. $A\neq B \iff \neg(a\in B\leftrightarrow a\in A)$

לכן הטענה נכונה.

ב. נתון $a\in A\leftrightarrow a\in B$.

$a\notin B \to a\notin A \underset{\text{שקול}}{\equiv} a\in A \to a\in B$

ובאופן סימטרי לצד שני. סה"כ $A=B$, מש"ל!

9 (3) אקסיומת היסודיות

אם $A\neq\emptyset$ אז קיים $a\in A$ כך שלכל $b\in A$, $b\notin A$.

6 (4) אקסיומת ההפרדה

לכל נוסחה $\varphi(x,y)$ נגדיר את האקסיומה הבאה.

לכל קבוצה A ~~[illegible]~~, $B=\{a\in A / \varphi(a,x)\}$ קבוצה!

תרגיל: הוכח ש- (I) $A\cap B$, (II) $A\setminus B$. $\varphi(x,B)=x\in B$

פתרון: (I) $A\cap B=\{a\in A / a\in B\}$ ובנוסחא

עם הפרדה, A קבוצה, ~~[illegible]~~ φ תקינה

ולכן $A\cap B$ קבוצה.

II) $\varphi(x,B) = x\notin B$ - ולכן $A\setminus B = \{a\in A / \varphi(a,B)\}$

A קבוצה, φ תכונה ולכן $A\setminus B$ קבוצה כנדרש

מש"ל.

3) 5) אקסיומת הזיווג

לכל a,b קיימת הקבוצה $\{a,b\}$.

הערה: ראינו בהרצאה שמאקסיומות היסודות והזיווג נובע כי $A\notin A$ לכל A קבוצה.

שאלה: האם קיימות A,B כך ש- $A\in B\in A$?

תשובה: לא! נניח שכן. מהאקסיומת הזיווג קיימת $\{A,B\}$

אבל $A\in B\in A$. אבל אין ∈-מינימלי בקבוצה זו בניגוד ל-"יס".
סתירה!

4) 6) אקסיומת האיחוד

לכל קבוצה F קיימת הקבוצה $\cup F=\{x: \exists A\in F: x\in A\}$

תרגיל: בהינתן קבוצות A,B. הוכח ש: I) $A\cup B$ קבוצה II) $A\Delta B$ קבוצה.

פתרון: I) $\{A,B\}$ קבוצה ולכן $\cup\{A,B\}=A\cup B$ קבוצה.

II) $A\Delta B= A\setminus B \cup B\setminus A$

אך מתרגילים קודמים נובע כי $A\setminus B$, $B\setminus A$ קבוצות

ולכן $A\Delta B$ קבוצה כאיחוד קבוצות.

מש"ל!

תרגיל: בנו קבוצה בת 3 איברים.

פתרון: $\{\emptyset\} = \{\emptyset,\emptyset\}$.

נסמן $A=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $B=\{\{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

ואז $F=\{A\cup B\}$ $\cup F=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

מש"ל!

8) 7) אקסיומת ההחלפה

A קבוצה כלשהי. נאמר ש- φ היא כלל התאמה

ל- A, אם לכל $x\in A$ קיים φ יחיד. עם התכונה $\varphi(x,y)$

ולכל קבוצה A וכלל התאמה φ. $B=\{y / \exists x\in A: \varphi(x,y)\}$ קבוצה.

(יש "החלפה" את "השמות" של איברים ב- A).

תרגיל: הוכח $A\times B$ קבוצה.

פתרון: נבחר $b\in B$ נגדיר כלל התאמה על a - $a\mapsto(a,b)$.

בגלל ש- A קבוצה האוסף $\{(a,b) / a\in A\}$ קבוצה.

נעשה כלל התאמה B $b\mapsto\{(a,b)/a\in A\}$

ולכן $F=\{\{(a,b)/a\in A\}/b\in B\}$ קבוצה.

לכן $\bigcup F$ קבוצה אז $A\times B=\bigcup F$ בדיוק! מושלם

⑤ ⑧ אקסיומת החזקה

אם A קבוצה אז $P(A)$ קבוצה. $P(A)=\{B / B\subseteq A\}$

⑦ ⑨ אקסיומת הקבוצה האינסופית

קיימת A כך ש- $\phi\in A$ ולכל $a\in A$ $S(a)\in A$

כאשר $S(a)=a\cup\{a\}$.

תרגיל: הראו ש- $a\cup\{a\}$ קבוצה.

פתרון: $\{a\}=\{a,a\}$ קבוצה אזי $a\cup\{a\}$ קבוצה!

תרגיל: בנו את כל הסודרים $\omega+\omega$.

פתרון: $0=\phi$. $n+1=n\cup\{n\}$.

הוכחנו בהרצאה ש- ω קיימת. נניח שבנינו את $\omega+n$.

נבנה את $\omega+n+1$. $\omega+n+1=(\omega+n)+1$

נגדיר כלל התאמה על ω: $n\mapsto\omega+n$ קבוצה.

בגלל ש- ω קבוצה אז $\{\omega+n / n\in\omega\}$ קבוצה.

לכן $\omega+\omega=\bigcup\{\omega+n/n\in\omega\}$ קבוצה מאקסיומת האיחוד.

הערה: אוסף כל הקבוצות אינו קבוצה!