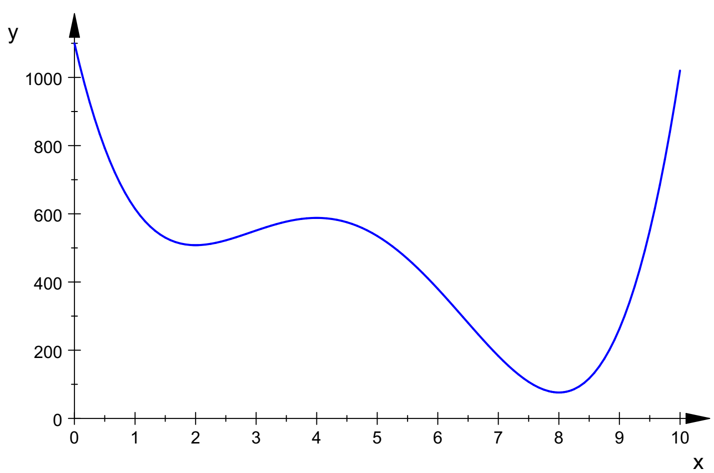
אנליזה מודרנית
פתרון תרגיל 8

תרגיל 1 יהי $f:[0,10]\to\mathbb{R}$ הפולינום $f(x)=3x^4-56x^3+336x^2-768x+1100$.

1. שרטטו את הגרף של הפולינום בקטע $[0,10]$.
2. לכל $x\in[0,10]$, חשבו את ההשתנות הטוטאלית $T_0^x[f]$. צרפו את הגרף של $T_0^x[f]$.
3. עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את $P_n\mid[0,10]$ חלוקה אחידה של הקטע ל-2^n קטעים. חשבו את $V(f,P_n)$ לדיוק של 3 ספרות לאחר הנקודה עבור $1\le n\le 6$.
4. עד כמה קרוב $V(f,P_6)$ להשתנות האמיתית $T_0^{10}[f]$ שמצאתם בסעיף 2?
5. תנו חלוקה $P\mid[0,10]$ בת ארבעה קטעים שתופסת את כל ההשתנות של f. כלומר, $V(f,P)=T_0^{10}[f]$.

הוכחה. נענה על הסעיפים בהתאמה. במהלך התרגיל השתמשתי בכלים MATLAB ו-MuPAD. להלן שרטוט של f:



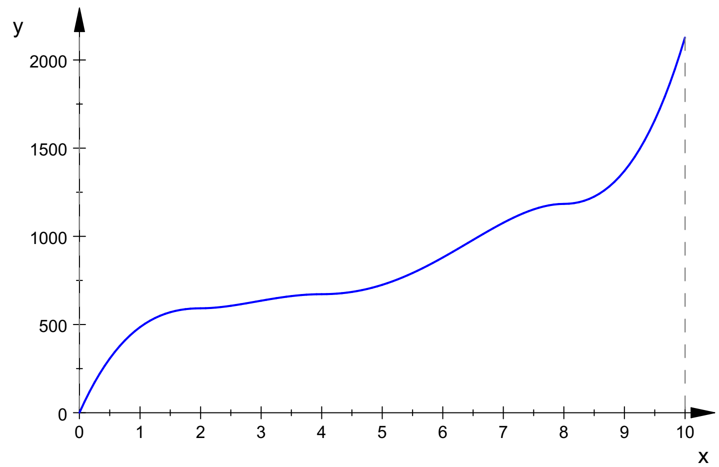
כעת, נחשב את ההשתנות הטוטאלית של f. לשם כך, נשים לב כי הנקודות בהן f משנה כיוון[1] הן $x=2,4,8$, שכן אלו נקודות קיצון והן השורשים של הנגזרת של f. כעת, ידוע כי כאשר פונקציה היא מונוטונית, ההשתנות שלה שווה להפרש

[1]כלומר, מיורדת לעולה ולהפך.

הפונקציה בין סוף הקטע לתחילת הקטע בערך מוחלט. נפרק את ההשתנות בהתאם לעליות וירידות, ונקבל כי:

$$T_0^x[f] = \begin{cases} f(0) - f(x) = 1100 - f(x) & 0 \le x \le 2 \\ f(0) - f(2) + f(x) - f(2) = 84 + f(x) & 2 \le x \le 4 \\ 84 + f(4) + f(4) - f(x) = 1260 - f(x) & 4 \le x \le 8 \\ 1260 - f(8) + f(x) - f(8) = 1108 + f(x) & 8 \le x \le 10 \end{cases}$$

כאשר בכל פעם שעברנו קטע, הוספנו את כל ההשתנות מן הקטע הקודם בנוסף להשתנות המונוטונית באותו הקטע, בהתאם לעלייה או ירידה. השרטוט של $T_0^x[f]$ להלן:



בעזרת הקוד הבא:

```
function [ y ] = f( x )
       y = 3 * x.^4 - 56*x.^3 + 336*x.^2 - 768 * x + 1100;
end
function [ t ] = V(P)
       t = 0;
       for i=2:length(P)
              t = t + abs(f(P(i))-f(P(i-1)))
       end
end
```

אפשר לחשב לכל $1 \le n \le 6$ את ההשתנות לפי החלוקה לעיל, ונקבל כי:

$$\begin{aligned} V(f, P_1) &= 1050 \\ V(f, P_2) &= 1931.25 \\ V(f, P_3) &= 2031.523 \\ V(f, P_4) &= 2115.239 \\ V(f, P_5) &= 2120.587 \\ V(f, P_6) &= 2127.204 \end{aligned}$$

ההשתנות האמיתית $T_0^{10}[f]$ שווה לפי מה שמצאנו בסעיף ב' ל־$2128 = f(10) + 1108$, ולכן השגיאה של $V(f, P_6)$ שמצאנו היא של בערך $0.796 \approx$.

כעת, נמצא חלוקה $P \mid [0, 10]$ בת ארבעה קטעים שתופסת את ההשתנות של f. קל לראות כי החלוקה הנ"ל תהיה $P: 0 < 2 < 4 < 8 < 10$, שכן בכל תת־הקטעים הנ"ל, f מונוטונית ולכן ההשתנות שלה ממש בכל תת־קטע שווה לערך מוחלט של הפרש הקצוות ־ שזה בדיוק מה שמחושב ב־$V(f, P)$, ולכן $V(f, P) = T_0^2[f] + T_2^4[f] + T_4^8[f] + T_8^{10}[f] = T_0^{10}[f]$, ולכן מצאנו את הדרוש. ■