נכתב על ידי נועם יערי

תהליכי מרקוב

סדרת משתנים מקריים (מרחב המצבים סופי):

$X_1, X_2, \cdots$

בהינתן X_n, X_m, $n < m$, בלתי תלוי ב $-X_1, \cdots, X_{n-1}$.

תיאור בסיסי של השרשרת: $A_{i,j} = P(X_{n+1} = i | X_n = j)$.

נניח שזה בלתי תלוי ב $- n$.

תכונות של A:

כל הערכים ≤ 0,

$$\forall j: \sum_i A_{i,j} = 1$$

בהינתן $A_{m \times m}$ נבנה שרשרת מרקוב (=סדרת מ״מ):

Ω, מרחב מצבים בגודל m.

$X_0 \sim ?$ עם ערכים ב $- \Omega$.

בהינתן $X_A = j$, נרגיל X_{n+1} לפי $P(X_{n+1} = i | X_1 = j) = A_{i,j}$.

דוגמה

$$\Omega = \{\overbrace{\text{שמח}}^{1}, \overbrace{\text{עצוב}}^{2}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

סימון

אחרי שקבענו את ההתאמה בין Ω לאינדקסים $1, \cdots, n$, נכתוב $X \sim v \in \mathbb{R}^n$ אם $P(X = i) = v_i$

טענה

אם $X_n \sim v$ אז $X_{n+1} \sim Av$.

הוכחה

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_j P(X_{n+1} = i | X_n = j) \cdot P(X_n = j) = \sum_j A_{i,j} v_j = (Av)_i$$

מסקנה

לכל k, אם $X_n \sim v$, $X_{n+k} | X_n \sim A^k v$

נכתב על ידי נועם יערי

הערה

ההתפלגות של ערך קבוע היא וקטור יחידה, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ וכדומה.

למשל, $X_7|X_0 = 1 \sim A^7 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

הערה

נניח ש - $X \sim v$. בהכרח $\mathcal{J}^t v = \sum v_i = 1$.

נסמן $\mathcal{J} = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

מה יודעים על A?

$$\mathcal{J}^t A = \mathcal{J}^t$$

מסקנה

כלומר – A חוקית מכיוון ש – $\mathcal{J}^t A = \mathcal{J}^t$.

v הוא וקטור התפלגות אם ורק אם $\mathcal{J}^t v = 1$. אם v וקטור ההתפלגות אז

$$\mathcal{J}^t(Av) = (\mathcal{J}^t A)v = \mathcal{J}^t v = A$$

מה קורה בטווח הארוך?

כלומר – מה ההתפלגות של X_n כאשר n גדול? = מה אחוז הימים שבהם התהליך במצב i?

<u>התפלגות קסטציונרית</u>=ההתפלגות של X_n בגבול $n \to \infty$.

$$X_n \sim v$$

$$X_{n+1} \sim Av$$

לכן ההתפלגות הקסטציונרית מקיימת את המשוואה $Av = v$.

(v הוא וקטור עצמי של הערך העצמי 1)

דוגמה

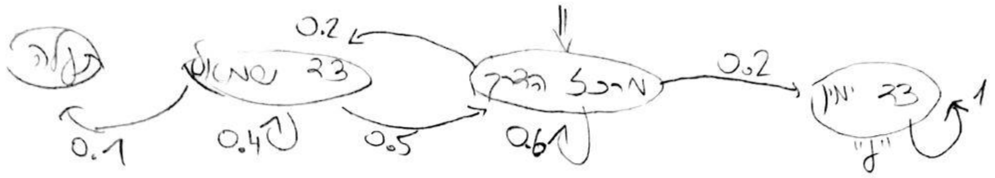
נמצא אותו בדוגמה הקודמת

$$\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\0.2 & 0.5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow -2x + 5y = 0, x + y = 1 \Rightarrow v = \begin{pmatrix}\frac{5}{7}\\\frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

נכתב על ידי נועם יערי

דוגמה

שיכור הולך בדרך צרה.



השיכור מתחיל ב - מרכז $= X_0$. מה הסיכוי שבסופו של דבר הוא יגיע למעקה שבצד ימין?

נסמן X = הסיכוי להגיע למעקה בהינתן ש - X_0 זה המרכז וב – Y את הסיכוי להגיע למעקה בהינתן X_0 זה צד שמאל.

$$X = 0.2 \cdot 1 + 0.6 \cdot X + 0.2 \cdot Y$$
$$Y = 0.5X + 0.4Y + 0.1 \cdot 0$$

דוגמה

השיכור מהסיפור הקודם מתחיל בנקודת האמצע. בסופו של דבר הוא יגיע לאחת מנקודות הקצה "מעקה" ו"תעלה", כמה זמן(=צעדים) זה יקח?

נסמן e = תוחלת מספר הצעדים עד למצב סופג, בהינתן X_0=אמצע.

נסמן f = תוחלת מספר הצעדים עד למצב סופג, בהינתן X_0=שמאל.

נגדיר $T \coloneqq \min\{n | X_n \in \{\alpha, \beta\}\}$. המשימה: לחשב את $E(T|X_0)$.

$$e = E(T|X_0 = \text{מרכז}) =$$
$$0.2 \cdot 1 + 0.6 \cdot \underbrace{E(T|\cancel{X_0 = \text{מרכז}}, X_1 = \text{מרכז})}_{e+1} + 0.2 \cdot \underbrace{E(T|X_0 = \text{מרכז}, X_1 = \text{מרכז})}_{f+1}$$
$$\Rightarrow e = (0.6e + 0.2f) + 1, f = (0.5e + 0.4f) + 1 \Rightarrow e = \frac{40}{7}, f = \frac{45}{7}$$