

תרגיל 10 – לינארית

1. חשבו את הדטרמיננטות הבאות:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{1.1}$$

פתרון: נפתח לפי השורה האחרונה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = +(-2) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2(3+2) + 3(1-12) = -10 - 33 = -43$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{1.2}$$

פתרון: נפתח לפי העמודה השנייה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \left[-1 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$(6-1) - (-9+4) + (-3+8) - 2[-(-6+8) - (2+2)] =$$

$$5 + 5 + 5 - 2(-2-4) = 15 + 12 = 27$$

2. הוכיחו את הטענות הבאות:

2.1. אם ב A יש שורת אפסים אז $\det A = 0$.

הוכחה: נניח כי $R_i(A) = 0$ ונפתח את הדטרמיננטה לפי השורה ה i .

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n 0 = 0 \text{ , אזי}$$

2.2. אם ב A יש שתי שורות זהות אז $\det A = 0$.

הוכחה: נניח כי $R_i(A) = R_j(A)$ עבור $i \neq j$, אזי $\det(A) = \det(B)$ כאשר B המטריצה

המתקבלת מ A אחרי פעולת השורה $R_i - R_j$. אבל במטריצה B יש שורת אפסים, לכן, לפי

הסעיף הקודם $\det(A) = \det(B) = 0$. מש"ל.

3. חשבו $|A|^{123456789}$ עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

פתרון: לפי כפליות הדטרמיננטה,

$$|A|^{123456789} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^{123456789} = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^{123456789} = (-1)^{123456789} = -1$$

4. תהי $A \in M_{n \times n}(R)$ עבור n זוגי. חשבו את $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(רמז: הפרידו לשני מקרים).

פתרון: נרצה להגיע למטריצה היחידה באמצעות פעולות שורה.

נשים לב: אם נבצע את החלפות של השורות הבאות:

1. השורה הראשונה והשורה ה- n (השורה האחרונה)

2. השורה השנייה והשורה ה- $n-1$

3. השורה השלישית והשורה ה- $n-2$

וכן הלאה, עד החלפת שתי השורות האמצעיות (n זוגי) דהיינו עד החלפת

$$\frac{n}{2} \text{ השורה ה-} \frac{n}{2} \text{ והשורה ה-} \frac{n}{2} + 1,$$

נקבל את מטריצת היחידה.

כלומר, אחרי $\frac{n}{2}$ החלפות שורה נקבל את מטריצת היחידה.

$$|A| = (-1)^{\frac{n}{2}} |I| = (-1)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 1 & \frac{n}{2} \text{ even} \\ -1 & \frac{n}{2} \text{ odd} \end{cases}, \text{ לכן,}$$

5. תהי $A \in M_{n \times n}(F)$, ($n \geq 2$), הוכיחו את הטענות הבאות:

5.1 $adj A$ הפיכה אם ורק אם A הפיכה.

הוכחה: ידוע כי $A \cdot adj(A) = |A| I$.

לכן, אם A הפיכה אז $|A| \neq 0$ ו $adj(A) = \left(\frac{1}{|A|} A\right) |A| I = I$. לכן $adj A$ הפיכה משמאל ולכן הפיכה.

לכן, מ"ל כי אם A אינה הפיכה אז $adj A$ אינה הפיכה.

נניח כי A אינה הפיכה. אזי, אם $A = 0$ אז A (כל מינור של A שווה אפס ובפרט) $adj A = 0$ ו

$adj A$ אינה הפיכה. אחרת, A אינה הפיכה $\Leftrightarrow |A| = 0$. לכן, $A \cdot adj(A) = 0$ עבור $A \neq 0$. לכן,

$adj(A)$ מחלקת אפס ובפרט אינה הפיכה. מש"ל.

5.2. לכל $\alpha \in F$ $Adj(\alpha A) = \alpha^{n-1} adj(A)$.

הוכחה: ברור כי $Adj(\alpha A), \alpha^{n-1} adj(A) \in M_{n \times n}(F)$. נראה כי לכל $1 \leq i, j \leq n$

$$(Adj(\alpha A))_{ij} = (\alpha^{n-1} adj(A))_{ij}$$

אבל,

$$(Adj(\alpha A))_{ij} = (cof(\alpha A)^t)_{ij} = (cof(\alpha A))_{ji} = (-1)^{j+i} M_{ji}(\alpha A)$$

כאשר $M_{ji}(\alpha A)$ היא הדטרמיננטה של המטריצה αA אחרי שהורדנו ממנה את השורה ה- j והעמודה ה- i .

נסמן ב- B את המטריצה המתקבלת מ- A אחרי הורדת השורה ה- j והעמודה ה- i . אזי,

$$M_{ji}(\alpha A) = |\alpha B|_{B \in M_{n-1 \times n-1}(F)} = \alpha^{n-1} |B| = \alpha^{n-1} M_{ji}(A)$$

לכן,

$$\begin{aligned} (Adj(\alpha A))_{ij} &= (-1)^{j+i} M_{ji}(\alpha A) = (-1)^{j+i} \alpha^{n-1} M_{ji}(A) = \alpha^{n-1} [(-1)^{j+i} M_{ji}(A)] = \alpha^{n-1} (cof(A))_{ji} \\ &= \alpha^{n-1} (cof(A)^t)_{ij} = \alpha^{n-1} (adj A)_{ij} \end{aligned}$$

מש"ל.

6. עבור כל A מצאו את המטריצה המצורפת $adj A$. קבעו בעזרתה אם A הפיכה. אם כן, מצאו את המטריצה ההופכית.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{6.1}$$

פתרון: נמצא את מטריצת הקופקטורים

$$cof(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המצורפת היא,

$$adj(A) = cof(A)^t = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

נחשב $A \cdot adj(A)$ (למעשה, על מנת לקבוע אם A הפיכה מספיק לחשב את האיבר במקום ה-1,1 במטריצת המכפלה – כלומר לכפול את השורה הראשונה ב- A בעמודה הראשונה של

$adj A$)

נקבל,

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = adj(A) = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ו } (|A| = 1) \text{ , לכן } A \text{ הפיכה,}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ .6.2}$$

פתרון: נמצא את מטריצת הקופקטורים

$$cof(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -5 \\ 1 & -7 & -5 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המצורפת היא,

$$adj(A) = cof(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -7 & -7 & 7 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

נחשב את האיבר במקום ה 1,1 במטריצת $A \cdot adj(A)$ באמצעות כפילת השורה הראשונה ב A בעמודה הראשונה של $adjA$.

נקבל,

$$|A| = (A \cdot adj(A))_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -7 & -7 & 7 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = 1 + 14 - 15 = 0$$

מכיוון ש $|A| = 0$, A אינה הפיכה.

בהצלחה! 😊