בוחן בית – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 19.05.21

המרצה: ארז שיינר.

יש לפתור את הבוחן לבד וללא עזרה.

יש לשלוח את הפתרונות סרוקים בקובץ PDF יחיד לכתובת המייל erez+test@math.biu.ac.il

את הפתרונות יש לשלוח עד לתאריך 06.06.21.

חלק א' – שאלות ממבחנים

1. שאלה 5 מהמבחן הבא https://math-wiki.com/images/5/59/18EngHedva1TestB.pdf

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=2a_n-1$, ותנאי ההתחלה $1<a_1$.
   א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.
   ב. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

סעיף א'

אנחנו רוצים להוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_{n+1}\geq a_n$

כלומר צ"ל כי $a_{n+1}-a_n\geq 0$

נעביר אגף בנוסחת הנסיגה, ונקבל כי לכל n מתקיים כי

$$a_{n+1}-a_n=a_n-1$$

לכן צריך בעצם להוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n-1\geq 0$ או $a_n\geq 1$.

נוכיח זאת באינדוקציה. עבור $n=1$ נתון כי $a_1>1$.

יהי n עבורו $a_n>1$ צ"ל כי גם $a_{n+1}>1$

אכן

$$a_{n+1}=2a_n-1>2\cdot 1-1=1$$

סעיף ב'

כיוון שמדובר בסדרה מונוטונית עולה, או שהיא חסומה ומתכנסת לגבול סופי, או שאינה חסומה ושואפת לאינסוף.

אם הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי, נסמן $a_n\to L$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה לאינסוף

$$\lim a_{n+1}=\lim\,(2a_n-1)$$

ולכן

$$L = 2L - 1$$

ולכן

$$L = 1$$

אבל! כיוון שהסדרה מונוטונית עולה, כל איבריה גדולים או שווים לאיבר הראשון, ולכן גם $L \geq a_1$

אבל $a_1 > 1$ וסה"כ קיבלנו כי

$$1 = L \geq a_1 > 1$$

בסתירה.

לכן הסדרה **אינה חסומה** ומתקיים כי $a_n \to \infty$ כפי שהסברנו.

2. שאלה 5 מהמבחן הבא https://math-wiki.com/images/d/d2/18EngHedva1TestC.pdf

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} + a_n + n$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

<u>סעיף א'</u>

נעביר אגף בנוסחאת הנסיגה

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{n} + n > 0$$

והוכחנו כי הסדרה מונוטונית עולה.

<u>סעיף ב'</u>

אם הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי, נסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim\left(\frac{a_n^2}{n} + a_n + n\right)$$

הביטוי $\frac{a_n^2}{n}$ שואף לאפס כיוון שהמונה שואף למספר הסופי ואילו המכנה שואף לאינסוף

הביטוי a_n שואף לL והביטוי n כמובן שואף לאינסוף.

סה"כ נקבל כי

$$\lim\left(\frac{a_n^2}{n} + a_n + n\right) = \infty$$

אך מצד שני

$$\lim a_{n+1} = L \in \mathbb{R}$$

בסתירה.

לכן הסדרה **אינה חסומה**, וכיוון שהיא מונוטונית עולה מתקיים כי $a_n \to \infty$.

3. שאלה 5 מהמבחן הבא https://math-wiki.com/images/2/21/20EngHedva1TestB.pdf

5. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2}$ וכן $a_1 = \frac{1}{2}$.
   א. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n < 1$.
   ב. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

<u>סעיף א'</u>

נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$ נתון כי $a_1 = \frac{1}{2} < 1$

יהי n עבורו $a_n < 1$ צריך להוכיח כי $a_{n+1} < 1$

אכן,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

<u>סעיף ב'</u>

ראשית, נוכיח באינדוקציה כי כל איברי הסדרה חיוביים.

עבור $n = 1$ נתון כי $a_1 = \frac{1}{2} > 0$

יהי n עבורו $a_n > 0$ צריך להוכיח כי $a_{n+1} > 0$

אכן,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} > \frac{0+0}{2} = 0$$

כעת נראה כי הסדרה מונוטונית יורדת.

צריך להוכיח כי לכל n מתקיים כי

$$a_{n+1} \le a_n$$

כיוון שכל איברי הסדרה חיוביים, אפשר לחלק בa_n ולקבל אי שיוויון שקול

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$$

אכן לפי נוסחאת הנסיגה

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a_n^3+a_n}{2}}{a_n}=\frac{a_n^2+1}{2}<\frac{1+1}{2}=1$$

כאשר המעבר האחרון הוא בזכות ההוכחה מסעיף א'.

כעת, הוכחנו כי הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ע"י אפס ולכן **מתכנסת לגבול סופי** $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1}=\lim\frac{a_n^3+a_n}{2}$$

ולכן

$$L=\frac{L^2+L}{2}$$

נעביר אגף ונוציא גורם משותף (עדיף מצמצום, כי אז לא מסתכנים בלהתבלבל עם בחלוקה באפס)

$$0=\frac{L^2+L}{2}-L=\frac{L^2+L-2L}{2}=\frac{L(L-1)}{2}$$

לכן $L=0$ או $L=1$

כיוון שהסדרה יורדת גבול קטן או שווה לאיבר הראשון ולכן $L\leq\frac{1}{2}$

ביחד נותרה רק אפשרות אחת, ובהכרח $L=0$ וזה גבול הסדרה.

4. שאלה 1 סעיף ג' מהמבחן הבא https://math-wiki.com/images/9/90/17EngInfi1DumbTest.pdf

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{2^{n^2}}$$

$$\frac{7^n}{2^{n^2}}=\left(\frac{7}{2^n}\right)^n\to 0^\infty=0$$

5. שאלה 1 סעיף ג' מהמבחן הבא https://math-wiki.com/images/d/d7/BIU_Hedva1_15_B.pdf

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2^n+n)}$$

$$\sqrt[n]{2^n+n}=\sqrt[n]{2^n\left(1+\frac{n}{2^n}\right)}=2\left(1+\frac{n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}\to 2\cdot 1^0=2$$

כאשר השתמשנו בכך ש $\frac{n}{2^n}\to 0$ וזה נובע מכלל המנה:

$$\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{2}<1$$

חלק ב' – שאלות חדשות

בכלל השאלות 'הופריכו' = 'הוכיחו או הפריכו'.

6. יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי סדרה a_n מתכנסת לגבול סופי כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n < a$
   א. הופריכו כי $\lim a_n < a$

הפרכה:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

אבל

$$\lim a_n = 1$$

   ב. הופריכו כי $\lim a_n \leq a$

הוכחה:

נב"ש כי $b = \lim a_n > a$

לכן $a < \frac{a+b}{2} < b$

כיוון ש $a_n \to b$, החל משלב מסויים מתקיים כי $a_n > \frac{a+b}{2}$ בסתירה לכך ש $a_n < a$ לכל n.

7. תהי סדרה a_n המתכנסת לגבול סופי $a_n \to L$
   א. הופריכו: החל משלב מסויים $a_n > L$ או שהחל משלב מסויים $a_n < L$

הפרכה:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

בכל האיברים במקומות הזוגיים מתקיים כי $a_n > 0$ ובכל האיברים במקומות האי זוגיים מתקיים כי $a_n < 0$ ולכן לא מתקיים שהחל משלב מסויים רק אחת מבין האופציות מתקיימת.

הפרכה נוספת ומטופשת המתאימה לנוסח השאלה – הסדרה הקבועה $a_n = L$ שלעולם אינה קטנה ואינה גדולה מהגבול.

   ב. הופריכו: קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $|a_n| < M$

הוכחה: זו הוכחה שדילגנו עליה בכיתה אבל מופיעה בסרטונים – סדרה המתכנסת לגבול סופי היא חסומה.

   ג. הופריכו: מתקיים כי $\sqrt[3]{a_n} \to \sqrt[3]{L}$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ צריך למצוא מקום K כך שלכל $n > K$ מתקיים כי $\left|\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{L}\right| < \varepsilon$

נפתח את הביטוי, נכפול בצמוד המתאים לחזקת שלוש $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

$$\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{L}\right|=\left|\left(\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{L}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\sqrt[3]{L}+\left(\sqrt[3]{L}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\sqrt[3]{L}+\left(\sqrt[3]{L}\right)^2}\right|=\left|\frac{a_n-L}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\sqrt[3]{L}+\left(\sqrt[3]{L}\right)^2}\right|\leq$$

נגדיל את המכנה באמצעות אי שיוויון המשולש ונקטין את הביטוי:

$$\leq\frac{|a_n-L|}{|a_n|^{\frac{2}{3}}+|a_n|^{\frac{1}{3}}|L|^{\frac{1}{3}}+|L|^{\frac{1}{3}}}\leq$$

כיוון שהסדרה מתכנסת לגבול סופי (ובהתאם לסעיף ב') קיים $M>0$ כך שלכל n מתקיים כי $|a_n|<M$

לכן נוכל להגדיל את המכנה ולהקטין את הביטוי:

$$<\frac{|a_n-L|}{M^{\frac{2}{3}}+M^{\frac{1}{3}}|L|^{\frac{1}{3}}+|L|^{\frac{1}{3}}}=\frac{|a_n-L|}{D}$$

כאשר סימנו את המכנה בקבוע D

$$0<D=M^{\frac{2}{3}}+M^{\frac{1}{3}}|L|^{\frac{1}{3}}+|L|^{\frac{1}{3}}$$

כעת, כיוון ש $a_n\to L$ קיים מקום אחריו

$$|a_n-L|<D\cdot\varepsilon$$

נבחר את K להיות שווה למקום הזה, ולכל $n>K$ מתקיים כי

$$\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{L}\right|<\frac{|a_n-L|}{D}<\frac{D\cdot\varepsilon}{D}=\varepsilon$$

8. תהיינה קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים $A,B\subseteq\mathbb{R}$ כך ש $A\subseteq B$

א. הופריכו: אם B חסומה מלעיל אזי גם A חסומה מלעיל ומתקיים כי $\sup A\leq\sup B$

הוכחה: אם B חסומה מלעיל אז קיים מספר $m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $b\in B$ מתקיים כי $b\leq m$

נוכיח כי כל חסם מלעיל m של B הוא גם חסם מלעיל של A (ובפרט גם A חסומה).

צריך להוכיח שלכל $a\in A$ מתקיים כי $a\leq m$.

יהי $a\in A$, כיוון ש $A\subseteq B$ נובע כי $a\in B$, ולכן $a\leq m$.

כיוון שA לא ריקה וחסומה מלעיל, יש לה חסם עליון $\sup A$ שהוא (לפי ההגדרה) חסם המלעיל הקטן ביותר של A.

הוכחנו שכל חסם מלעיל של B הוא גם חסם מלעיל של A.

כיוון ש $\sup B$ חסם מלעיל של B הוא גם חסם מלעיל של A

אבל $\sup A$ הוא חסם המלעיל הקטן ביותר של A! כלומר הוא קטן מכל חסם מלעיל אחר של A.

בפרט,

$$\underbrace{\sup A}_{\text{חסם המלעיל הקטן ביותר של } A}\leq\underbrace{\sup B}_{\text{חסם מלעיל כלשהו של } A}$$

ב. הופריכו: אם $A \neq B$ אזי $\sup A < \sup B$

הפרכה:

נביט בקבוצות

$$A = \{1,3\}, B = \{1,2,3\}$$

הקבוצות עונות על נתוני השאלה אך $\sup A = \sup B = 3$.

בהצלחה!