אנליזה 1 תשפב מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)\sin(2x)}{1-\cos(x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)\sin(2x)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{e^x+x-1}\cdot\frac{e^x+x-1}{x}\cdot\frac{\sin(2x)}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}$$
$$=1\cdot 2\cdot 2\cdot 2=8$$

כאשר נעזרים בכך ש $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{e^x+x-1}$ מחושב בעזרת

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

ו

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+1=1+1=2$$

(ב) $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}e^{\ln\left((2-x)^{\frac{1}{x-1}}\right)}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}\ln(2-x)}=e^{\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}\ln(2-x)\right]}$$

כעת נחשב

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}\ln(2-x)\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{1}=-1$$

ולכן הגבול בסה"כ שווה ל e^{-1}.

(ג) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=n^2+1$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\frac{n^2+2n+1+1}{n^2+1}\to 1$$

לפי הוצאת גורם משמעותי n^2 ממונה ומכנה. ולכן גם

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^2+1} \to 1$$

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-a}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=1$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=1$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x-a}{x-1} = a$$

לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x-a}{x-1} = \begin{cases} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{1} = e & a = e \\ = \left\{\frac{\neq 0}{0}\right\} = \pm\infty & a \neq e \end{cases}$$

ולכן רק עבור $a=e$ מוגדר $\lim_{x\to 1} \frac{e^x-a}{x-1}$ והוא שווה ל e ומתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=1$? מהי $f'(1)$ במקרים אלה?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=e$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=1$) אם f גזירה ב $x=1$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{e^x-e}{x-1} - e}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e - e(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - ex}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{2(x-1)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{2} = \frac{e}{2}$$

כלומר f גזירה ב $x=1$ עבור $a=e$ ומתקיים $f'(1) = \frac{e}{2}$.

3. נביט בפונקציה $f(x) = x+1-\sqrt{x}$.

(א) מצאו את הערך המינימאלי של $f(x)$.

פתרון: נגזור את הפונקציה בתחום הגדרתה (תחום ההגדרה הוא $[0,\infty)$)

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ומתקיים ש $f'(x)=0$ אם ורק אם

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

אם ורק אם $2\sqrt{x}=1$ והפתרון היחיד הוא $x=\frac{1}{4}$. ונסתכל בטבלה

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$

להסיק כי f יורדת ממש בקטע $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ ועולה ממש בקרן $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$ ולכן הנקודה $x=\frac{1}{4}$ היא נקודת מינימום יחידה והערך המינימלי בה הוא

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

.

(ב) לכל ערך של $a\in\mathbb{R}$, מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=a$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$g(x) = f(x) - a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה נקודות חיתוך יש ל $g(x)$ עם ציר x. כיוון ש g ו f נבדלים בקבוע יש להם אותם תחומי עליה/ירידה ואותה נקודת קיצון. לאור סעיף קודם נסיק כי ל g יכולה להיות לכל היותר נקודת חיתוך יחידה בקטע $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ ולכל היותר נקודת חיתוך יחידה בקטע $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$. כיוון ש $\frac{1}{4}$ היא מינימום יחידה נקבל שעבור $a=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$ תהיה נקודת חיתוך יחידה . בנוסף לכל $a<\frac{3}{4}$ נקבל שהערך המינימאלי של g הוא $g(\frac{1}{4})>0$ ולכן היא לא תחתוך את ציר x באף נקודה.

עבור $a>\frac{3}{4}$ נחשב מה קורה בקצוות:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1-\sqrt{x}-a = 1-a$$

$$\lim_{x\to\infty} x+1-\sqrt{x}-a = \lim_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{x}\right)\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} - a = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-x}{x+1+\sqrt{x}} - a = \infty$$

כאשר הגבול השני נקבע לפי הגורם המשמעותי במכנה שהוא x^2 לעומת המכנה שהוא x. ולכן:

- תמיד תהיה נקודת חיתוך יחידה בקטע $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$ כי $g(\frac{1}{4})<0$ (אנחנו במקרה ש $a>\frac{3}{4}$) וקיימת נקודה $c>\frac{1}{4}$ בה $g(c)>0$ (כי $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$) ומכיוון ש g פונקציה רציפה תהיה לה נקודת חיתוך עם ציר x (ויכולה להיות לכל היותר אחת כי g כולה בקטע זה ולכן יש לה בדיוק נקודה אחת).
- תהיה נקודת חיתוך יחידה בקטע $[0,\frac{1}{4})$ אם ורק אם $1-a\geq 0$ (או $a\leq 1$). נימוק: הפונקציה f רציפה בקטע $[0,\frac{1}{4}]$ והערך המינימאלי שלה שמה הוא $\frac{3}{4}$ והערך המקס' מתקבל ב 0 והוא $f(0)=1$ (כי f יורדת $[0,\frac{1}{4}]$)
- לסיכום:
- עבור $a=\frac{3}{4}$ יהיה פתרון יחיד.

- עבור $a < \frac{3}{4}$ לא יהיה פתרון.
- עבור $\frac{3}{4} < a \leq 1$ יהיו שני פתרונות.
- עבור $1 < a$ יהיה פתרון יחיד.

4. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + 1 - \sqrt{a_n}$ וכן $0 < a_1 < 1$.

(א) הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 < a_n < 1$.
פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $0 < a_1 < 1$.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $0 < a_n < 1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $0 < a_{n+1} < 1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = a_n + 1 - \sqrt{a_n}$$

כעת, בשאלה קודמת ראינו שהפונקציה

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x}$$

היא יורדת ממש בקטע $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ועולה ממש בקרן $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ ולכן הנקודה $x = \frac{1}{4}$ היא נקודת מינימום יחידה והערך המינימלי בה הוא $\frac{3}{4}$. לכן זה גם הערך המינימאלי בקטע $[0, 1]$. הערך המקסמאלי בקטע זה הוא $f(0)$ או $f(1)$ הגבוה מבין שניהם (כי f יורדת עד $\frac{1}{4}$ ואז עולה). נחשב את הערך המקסימאלי

$$\max\{f(0), f(1)\} = \max\{1, 1\} = 1$$

ולכן לכל ערך $0 < x < 1$ מתקיים כי $\frac{3}{4} \leq f(x) < 1$. מכיוון שההנחה היא ש $0 < a_n < 1$ אז $\frac{3}{4} \leq a_{n+1} = f(a_n) < 1$ ובפרט

$$0 < a_{n+1} < 1$$

כמו שרצינו.

(ב) חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
פתרון: קיבלנו בסעיף קודם שכל איברי הסדרה חיוביים וגם חסומים על ידי 1 מלמעלה (גם חסומים על ידי 0 מלמטה).
טענה: הסדרה מונוטונית עולה. הוכחה: לפי הגדרה

$$a_{n+1} = a_n + 1 - \sqrt{a_n}$$

ולכן, בהעברת אגף

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \sqrt{a_n} > 0$$

שהרי $0 < a_n < 1$ ולכן גם $0 < \sqrt{a_n} < 1$.
כיוון שהסדרה חסומה ע"י 1 ועולה יש לסדרה גבול סופי שנסמנו L. כלומר $a_n \to L$ ולכן גם $a_{n+1} \to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = a_n + 1 - \sqrt{a_n} \to L + 1 - \sqrt{L}$$

כלומר $L = L + 1 - \sqrt{L}$. נעביר אגף לקבל

$$\sqrt{L} = 1$$

והפתרון היחיד שהוא הגבול במקרה שלנו הוא $L = 1$.

5. תהא f הגזירה פעמיים בכל הממשיים כך ש $f''(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

(א) הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

פתרון: יהא a ממשי. נפתח פולינום טיילור עם שארית טיילור סביבו:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

עבור c בין a ל x. לפי הנתון $f''(c) > 0$. כיוון ש $2!$, $(x-a)^2$ אי שליילים נקבל שהשארית $\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$ אי שלילית ולכן

$$f(x) - f(a) + f'(a)(x-a) = \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 \geq 0$$

ואז נעביר אגף לקבל

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

כמבוקש.

(ב) הוכיחו כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

או

$$\lim_{x\to(-\infty)} f(x) = \infty$$

פתרון: לפי הנתון ש $f'' > 0$ נקבל ש f' לא יכולה להיות קבועה. לכן קיים a עבורו $f'(a) \neq 0$. אם $f'(a) > 0$ נקבל ש

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$

ולפי חצי סנוויץ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

ואם $f'(a) < 0$ אזי

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \xrightarrow{x\to(-\infty)} \infty$$

ולפי חצי סנוויץ

$$\lim_{x\to(-\infty)} f(x) = \infty$$