89113 אלגברה ליניארית 2 תרגיל 7

1. יהי V מרחב ווקטורי ממֵמד סופי מעל שדה F. מה הפולינום המינימלי $m_{I_V}(x)\in F[x]$ עבור העתקת הזהות $I_V\in L(V,V)$? מה הפולינום המינימאלי $m_{0_{L(V,V)}}(x)\in F[x]$ עבור העתקת האפס $0_{L(V,V)}\in L(V,V)$?

2. יהיו $a,b,c\in F$ עבור שדה F. בהינתן

$$A=\begin{bmatrix}0&0&c\\1&0&b\\0&1&a\end{bmatrix}.$$

הוכח שהפולינום האופייני של A הוא $p_A(x)=x^3-ax^2-bx-c$ ושזה גם הפולינום המינימלי.

3. תהי

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\-2&-2&2&1\\1&1&-1&0\end{bmatrix}.$$

הראה שהפולינום האופייני $p_A(x)$ והפולינום המינימלי $m_A(x)$ שניהם שווים $x^2(x-1)^2$.

4. האם המטריצה מתרגיל 3 דומה למטריצה אלכסונית מעל השדה $\mathbb{C}$?

5. תהי V מרחב ווקטורי ממֵמד n. נניח ש $T\in L(V,V)$ כך ש $T^k=0_{L(V,V)}$ עבור $k>0$ כל שהוא. הוכח ש $T^n=0_{L(V,V)}$. רמז: השתמש בתכונות הפולינום המינימלי.

6. מצא/י מטריצה 3×3 עבורה הפולינום המינימלי שווה x^2.

7. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ הפונקציה שמטילה כל ווקטור על הישר ה $y=x$, על ידי $T(x,y)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)$.
   a. הוכח ש T היא העתקה ליניארית.
   b. מצא/י את $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של T.
   c. האם T לכסינה? אם כן מצא $P\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש $P^{-1}[T]_E P=D$, כאשר D היא מטריצה אלכסונית, ו $E\subset\mathbb{R}^2$ הוא הבסיס הסטנדרטי.

8. . הוכיחו שעבור בלוק ג'ורדן, הפולינום האופייני שווה לפולינום המינימלי.