

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 12

יהי פולינום מתוקן $f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 \in F[x]$. הפולינום נקרא **מצומצם** אם $c_{n-1} = 0$.

לפולינום $f(x)$ ניתן להצמיד פולינום מצומצם, הנקרא **הפולינום המצומצם המשויך** ל $f(x)$. הוא מוגדר ע"י

$$\tilde{f}(x) = f\left(x - \frac{c_{n-1}}{n}\right).$$

אם α שורש של $\tilde{f}(x)$ אז $\alpha - \frac{c_{n-1}}{n}$ הוא שורש של $f(x)$.

1. הראו של $f(x)$ ו- $\tilde{f}(x)$ יש אותה חבורת גלואה ואותה דיסקרימיננטה.
2. הראו שהדיסקרימיננטה של פולינום (מתוקן) מדרגה 4 שווה לדיסקרימיננטה של הרזולונט הקובי שלו.
3. תהי G ת"ח טרנזיטיבית של S_4 כך ש $4 \mid |G|$. תהי V חבורת קליין. נסמן $m = [G : G \cap V]$. ראינו בתרגול שמתקיים $m \mid 6$.

- a. הראו שאם $m = 6$ אז $G = S_4$.
- b. אם $m = 3$ אז $G = A_4$.
- c. אם $m = 1$ אז $G = V$.
- d. אם $m = 2$ אז $G = \mathbb{Z}_4$ או $G = D_4$.

4. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ אי-פריק מדרגה 4. הראו שאם יש ל $f(x)$ שני שורשים ממשיים בדיוק אזי חבורת הגלואה של שדה הפיצול היא D_4 או S_4 .

5. יהי $f(x) = x^4 + ax^2 + b \in \mathbb{Q}[x]$ אי-פריק. תהי G חבורת גלואה של שדה הפיצול מעל \mathbb{Q} .
 - a. אם b הוא ריבוע ב \mathbb{Q} , אזי $G \cong V$.
 - b. אם b אינו ריבוע, אך $b(a^2 - 4b)$ הוא ריבוע, אז $G \cong \mathbb{Z}_4$.
 - c. אם $b, b(a^2 - 4b)$ אינם ריבועים אזי $G \cong D_4$.