תרגיל תיאורטי מספר 1

1. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של $\mathbb{R}^4$:

$$U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$$

מצא מערכת מישוואות ליניארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק U.

פתרון:

אנו רוצים לבדוק האם וקטור כללי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in U$. זה קורה אם ורק אם למערכת המיוצגת ע"י $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & -2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & -2 & d \end{array}\right)$ יש פיתרון. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & -2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & -2 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -2 & d-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{array}\right)$$

למערכת יש פיתרון אם ורק אם מתקיים $a-c=0, b-d=0$. לכן התשובה היא:

$$U = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} a-c=0 \\ b-d=0 \end{cases}\} = \{x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0\}$$

2. האם הקבוצה $B = \{1+x^2+2x^3, 5+x+6x^2+13x^3, -3-x-3x^2-8x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ תלויה ליניארית? אם כן, מצא צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0, אם לא השלימו אותה לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

פתרון:

נניח צ"ל שמתאפס $\alpha_1(1+x^2+2x^3)+\alpha_2(5+x+6x^2+13x^3)+\alpha_3(-3-x-3x^2-8x^3)=0$ האם בהכרח $\alpha_i = 0$ לכל i? מהשיוון של הצ"ל, נקבל את המערכת הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 13 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

שהשאלה היא האם יש לה רק את הפתרון הטירוואלי. נדרג (ללא עמודת האפסים שמשווים אליה):

$$\begin{pmatrix}1&5&-3\\0&1&-1\\1&6&-3\\2&13&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-3\\0&0&14\\0&1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש רק את הפתרון הטרי' ולכן הוקטורים בת"ל.

נשלים אותם לבסיס: כיוון ש B בת 3 איברים והיא בת"ל מספיק למצוא $a+bx+cx^2+dx^3$ שביחד איתו נקבל בסיס. באותו רעיון כמו מקודם הדבר קורה אם ורק אם למערכת

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&5&-3&a&0\\0&1&-1&b&0\\1&6&-3&c&0\\2&13&-8&d&0\end{array}\right)$$

יש רק את הפתרון הטרי'. שזה קורה אמ"מ $\dim C(A)=4$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1&5&-3&a\\0&1&-1&b\\1&6&-3&c\\2&13&-8&d\end{pmatrix}$ שזה קורה אמ"מ $\dim C(A^t)=\dim R(A)=4$. נדרג את A^t

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\5&1&6&13\\-3&-1&-3&-8\\a&b&c&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&-1&0&-6\\a&b&c&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&-3\\a&b&c&d\end{pmatrix}$$

רואים שאם ניקח $a=b=c=0,d=1$ נקבל מטריצה שהדרגה שלה 4. לכן $B\cup\left\{x^3\right\}$ קבוצה בת"ל עם 4 איברים ולכן בסיס ל $\mathbb{R}_3[x]$

3. יהי $V=\mathbb{R}_3\left[x\right]$ ותהי

$$U=\left\{p\left(x\right)\in V\mid p\left(x\right)=x\cdot p'\left(x\right)\right\}$$

תת קבוצה של V. ($p'\left(x\right)$היא הנגזרת של $p\left(x\right)$)

(א) הוכיחו ש־U תת מרחב של V.

פתרון:

פולינום האפס שייך ל U כי הוא מקיים $0=x\cdot 0'$.

סגירות: יהיו $p\left(x\right),q\left(x\right)\in U$ ו־$\alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$p\left(x\right)+\alpha q\left(x\right)=x\cdot p'\left(x\right)+\alpha x\cdot p'\left(x\right)=x\cdot\left(p'\left(x\right)+\alpha\cdot p'\left(x\right)\right)=x\cdot\left(p\left(x\right)+\alpha\cdot p\left(x\right)\right)'$$

(המעבר הראשון נובע מכך מכך ש $p(x),q(x)\in U$ ולכן $p\left(x\right)=x\cdot p'\left(x\right),\ q\left(x\right)=x\cdot q'\left(x\right)$). ומכאן $p\left(x\right)+\alpha q\left(x\right)\in U$ ולכן Uהוא תת מרחב של V.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל־U.

פתרון:

נמצא קריטריון שקול לכך ש $p\left(x\right)=a+bx+cx^{2}+dx^{3}\in U$. זה קורה אמ"מ

$$a+bx+cx^{2}+dx^{3}=x\cdot\left(a+bx+cx^{2}+dx^{3}\right)'=x\cdot\left(b+2cx+3dx^{2}\right)=bx+2cx^{2}+3dx^{3}$$

שזה אמ"מ יש פתרון למערכת (שמתקבלת מהשאוות המקדם החופשי, המקדם של x, המקדם של x^2 והמקדם של x^3) :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

שהפתרון שלה הוא $\left\{ \begin{pmatrix}0\\ b\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ :\ b\in\mathbb{R}\right\}$ ולכן

$$U=\left\{ p\left(x\right)=bx:\ b\in\mathbb{R}\right\} =span\left\{ x\right\}$$

המימד הוא 1.

4. מצאו מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ כך ש $N(A)=C(A)$ (למתעניינים: האם תוכלו להכליל ולמצוא $A\in\mathbb{R}^{2k\times2k}$ עם $N(A)=C(A)$?)
פתרון:

נקבע כי $N(A)=C(A)=span\left\{ \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ (חישבו למה $\dim N(A)\neq0,2$) ונבנה את המטריצה $A=\begin{pmatrix}a & b\\ a & b\end{pmatrix}$ (כי עמודות A צריכים להיות כפולה של $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$) ונרצה ש

$$A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

שזה שקול לכך ש $a+b=0$ או $b=-a$. אכן המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ טוענה על הדרישה.

לגבי הכללה: אפשר לקחת את המטריצה $A=\begin{pmatrix}0_{k\times k} & I_{k\times k}\\ 0_{k\times k} & 0_{k\times k}\end{pmatrix}$ (למשל עבור $k=2$ $A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$) ואז $C(A)=N(A)=span\left\{ e_{1},\ldots,e_{k}\right\}$ כאשר $e_{1}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ וכו'.

5. עבור $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times4}$ מצאו בסיס למרחבים $N(A),C(A),R(A)$
פתרון:

נדרג את A:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\1&-1&1&-1\\-2&1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&0&0&-3\\0&-1&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&0&0&1\\0&1&-5&-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$N(A)=\left\{\begin{pmatrix}4t\\5t\\t\\0\end{pmatrix}\;:\;t\in\mathbb{C}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}4\\5\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$R(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$C(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

6. תהי מטריצה $A\in M_{4\times 8}(\mathbb{R})$ כך ש־$rank\,(A)=4$

(א) האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

פתרון:

בת"ל כי נתון ש $rank(A)=\dim R(A)=4$ ויש רק 4 שורות.

(ב) האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

פתרון:

ת"ל כי נתון ש $rank(A)=\dim C(A)=4$ ויש 8 עמודות. לכן יש 4עמודות שתלויות ב 4עמודות אחרות.

(ג) למה שווה $dim\,(N\,(A))$? והאם $N(A)=R(A)$ בהכרח?

פתרון:

לפי משפט הדרגה $\dim N(A)+rank(A)=8$ לכן

$$\dim N(A)=8-rank(A)=8-4=4$$

לא בהכרח כי $N(A)=R(A)$, למשל

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מתקיים כי $e_1\in R(A)$ אבל $e_1\notin N(A)$.

7. יהיה $A,B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ הוכיחו /הפריכו: $rank(A) - rank(B) \leq rank(A-B)$

פתרון:

הוכחה: שקול להוכיח כי $rank(A) \leq rank(A-B) + rank(B)$. נגדיר $\tilde{A} = A-B, \tilde{B} = B$ ונקבל שצריך להוכיח כי $rank(\tilde{A}+\tilde{B}) \leq rank(\tilde{A}) + rank(\tilde{B})$ שראינו שמתקיים.

8. יהיו $n < m$ ויהיו $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$. הוכיחו כי $AB \neq I$. (כאשר $I \in \mathbb{F}^{m\times m}$ מטריצת היחידה מגודל $m \times m$).

פתרון:

נניח בשלילה כי $AB = I$ אזי בפרט

$$m = rank(I) = rank(AB) \leq rank(A) \leq n$$

(המעבר האחרון הוא כי $rank(A) = \dim C(A) \leq n$) סתירה.