

# תרגיל בית 1 – טופולוגיה

## שאלה 1

תזכורת: תהי  $f: X \rightarrow Y$  פונקציה כלשהי. יהיו  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  תת קבוצות. אזי "התמונה של  $A$ " היא:  $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ ; ו"התמונה ההפוכה של  $B$ " היא:  $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$ .

תהי  $f: X \rightarrow Y$ . הוכיחו את הטענות הבאות:

א.  $A \subseteq Y$  לכל  $f(f^{-1}[A]) \subseteq A$ .

ב. אם  $f$  על אזי  $f(f^{-1}[A]) = A$ . תנו דוגמה נגדית במקרה בו  $f$  לא על.

ג.  $B \subseteq X$  לכל  $f^{-1}[f(B)] \supseteq B$ .

ד. אם  $f$  חח"ע אזי  $f^{-1}[f(B)] = B$  לכל  $B \subseteq X$ . תנו דוגמה נגדית במקרה בו  $f$  אינה חח"ע.

## שאלה 2

תהי  $f: X \rightarrow Y$ .

(א) הוכיחו ש-  $f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c$  לכל  $A \subseteq Y$ .

(ב) נסחו והוכיחו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-  $f(A^c) = (f(A))^c$  לכל  $A \subseteq X$ .

(ג) הוכיחו ש-  $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$  לכל  $A, B \subseteq X$ .

(ד) הוכיחו ש-  $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$  לכל  $A, B \subseteq X \Leftrightarrow f$  חח"ע.

## שאלה 3

הוכיחו כי בכל מרחב מטרי  $(X, d)$  מתקיים:

1. לכל  $n \geq 2$   $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$

2.  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$

## שאלה 4

נסמן ב-  $X$  את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה  $\{1, 2, \dots, n\}$ . נגדיר

את הפונקציה הבאה:  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  על ידי:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{\min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}} & x \neq y \end{cases}$$

.  $d$  היא מטריקה על  $X$ .

רמז: הראו ש-  $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ .

## שאלה 5

תהי  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה המקיימת לכל  $x, y, z \in X$ :

$$1. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2. \quad d(y, x) \leq d(z, y) + d(z, x)$$

הוכיחו ש-  $d$  מגדירה מטריקה על  $X$ .

## שאלה 6

הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות.

$$1. \quad d((x, y), (x', y')) = \min\{|x - x'|, |y - y'|\} \text{ על } \mathbb{R}^2$$

$$2. \quad d((x, y), (x', y')) = |x| + |y| + |x'| + |y'| \text{ על } \mathbb{R}^2$$

$$3. \quad D((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y') \text{ על } X \times X, \text{ כאשר } (X, d) \text{ הוא}$$

מרחב מטרי.

**בהצלחה!**