חשבון אינפי 1

תרגיל 5

1. הוכיחו (באופן מפורש, ע"פ הגדרה) כי הסדרות הבאות מתכנסות לאינסוף

(א) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} 1/k\}_{n=1}^{\infty}$

(ב) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k}\}_{n=1}^{\infty}$

2. חשבו את הגבולות הבאים

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{1000n}{n^2-2}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1})$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-1)(\sqrt{n^3-n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}$

(ד) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

(ה) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!}$

(ו) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... \frac{n-1}{n^2}$

(ז) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

(ח) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\ldots\cdot(2n-1)}{n!}$

(ט) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + (-1)^n + 7^n}$

(י) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

(כ) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2})\ldots(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$

(ל) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{3n^2+3n+5}$

(מ) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(ne^5)}{\ln n}\right)^{\ln n}$

3. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות והסבירו מדוע אלו כולם

(א) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n - 7\left[\frac{n}{7}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$

(ב) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{7^n+(-7)^n}{5^n}\cos\frac{\pi n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(ג) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\sqrt{\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[4]{2n+\sqrt{3n}}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4. הוכיחו או הפריכו

(א) $\limsup(-a_n) = -\liminf(a_n)$

(ב) אם לכל n, $a_n > 0$ ומתקיים $\limsup(a_n)\limsup\left(\frac{1}{a_n}\right) = 1$ אזי הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים

(ג) $\limsup(a_n - b_n) = \limsup(a_n) - \limsup(b_n)$

(ד) $\liminf(a_n b_n) = \liminf(a_n)\liminf(b_n)$

בהצלחה!