בס״ד

אינפי 1 - תרגול 9

<u>משפט ערך הביניים</u>: תהי $f(x)$ פו' רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי y_0 מס' הנמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$. אזי קיימת נקודה $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)=y_0$.

בכיתה הוכחתם רק עבור $y_0=0$, אבל ניתן להכליל את זה לכל $y_0\in[a,b]$.

<u>תרגילים</u> 1. תהי f פו' רציפה בקטע $[0,2]$ כך ש- $f(2)=3$.
הוכיחו שקיימת נקודה $x_0\in[0,2]$ כך ש- $f(x_0)=\frac{1}{x_0}$.

<u>פתרון</u>: נגדיר פו' חדשה $g(x)=x\cdot f(x)$, היא רציפה בקטע $[0,2]$ כמכפלה של פו' רציפות. בנוסף, $g(0)=0$, $g(2)=6$. $0<1<6$, לכן, לפי משפט ערך הביניים, קיים $x_0\in[0,2]$ כך ש- $g(x_0)=1$. $\Rightarrow$
$x_0 f(x_0)=1 \Rightarrow f(x_0)=\frac{1}{x_0}$. מש"ל.

2. תהי $f:[a,b]\to[a,b]$ פו' רציפה. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ המקיימת $f(c)=c$.

<u>פתרון</u>: אם $f(a)=a$ או $f(b)=b$, אז סיימנו. לכן, נניח $f(a)\neq a$, $f(b)\neq b$.
$\Rightarrow$ $f(a)>a$, כי $f(a)\in[a,b]$, ו- $f(b)<b$, כי $f(b)\in[a,b]$.
נסתכל על הפו' החדשה $g(x)=f(x)-x$. היא רציפה ב- $[a,b]$ כסכום של פו' רציפות. בנוסף, $g(a)=f(a)-a>0$ כי $f(a)>a$, ו- $g(b)=f(b)-b<0$ כי $f(b)<b$. לכן, לפי משפט ערך הביניים, קיים $c\in[a,b]$ כך ש- $g(c)=0 \Rightarrow f(c)-c=0 \Rightarrow$
$f(c)=c$. מש"ל.

<u>משפט רול</u>: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b), ומתקיים $f(a)=f(b)$ אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

<u>תרגילים</u>: 1. הוכיחו כי לפולינום $\frac{5}{7}x^5+x^3+x+10$ יש שורש ממשי אחד בלבד.

<u>פתרון</u>: $f(0)=10$, $f(-2)=$ בערך -91.42.

בס"ד

לכן, לפי משפט ערך הביניים, קיים $c\in(0,2)$ כך ש- $f(c)=0$.

נניח בשלילה שיש שתי פתרונות למערכת. כלומר, קיימים $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(c)=f(d)=0$.

לפי משפט רול, קיים $x_0\in(c,d)$ כך ש- $f'(x_0)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=0$.

אבל, $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ לכל x, בסתירה.

2. מצאו את מס' הפתרונות של המשוואה x^4+3x+1 ב- $[-2,-1]$.

<u>פתרון:</u> נסמן $f(x)=x^4+3x+1$. $f(-2)=11$ ו- $f(-1)=-1$.

$f(-2)\cdot f(-1)<0$, לכן אפשר להשתמש במשפט ערך הביניים.

נניח כי יש למשוואה פתרון יחיד. כלומר, קיים $c\in[-2,-1]$ כך ש- $f(c)=0$. בקטע $[-2,c]$ הפו' מקבלת כל ערך בין 11 ל- 0 (ובפרט את הערך $\frac{1}{2}$) (לפי משפט ערך הביניים).

בקטע $[c,-1]$ הפו' מקבלת כל ערך בין -1 ל- 0, ובפרט את הערך $\frac{1}{2}$. כלומר, יש x_1,x_2 כך ש- $f(x_1)=f(x_2)=\frac{1}{2}$.

לפי משפט רול, קיימת נקודה $d\in[x_1,x_2]$ כך ש- $f'(d)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$.

אבל, $f'(x)=4x^3+3 \Rightarrow f'(x)=0$ רק עבור $x=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

שלא נמצא בתחום. לכן ב- $[-2,-1]$ הנגזרת לא מתאפסת, בסתירה!

לכן, אין לפולינום שורשים בתחום.

3. תהי f גזירה ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $f(1)=0$, $f(x)\neq 0$ לכל $x\in(0,1)$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(0,1)$ המקיימת $c=\frac{-f(c)}{f'(c)}$

<u>פתרון:</u> נסתכל על הפו' $g(x)=xf(x)$. גזירה כמכפלה של פו' גזירות. $g(0)=0$, $g(1)=0$, לכן קיים $c\in(0,1)$ כך ש- $g'(c)=0$.

$$g'(x)=f(x)+xf'(x)$$

$$g'(c)=f(c)+cf'(c)=0 \Rightarrow$$

$$cf'(c)=-f(c) \Rightarrow c=\frac{-f(c)}{f'(c)}$$ מש"ל

3. האם ההפך של המשפט נכון? כלומר, נניח ש- $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b), וקיימת c כך ש- $f'(c)=0$.

האם יש x_1,x_2 כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$?

פתרון לא. נסתכל למשל על הפו' $f(x)=x^3$ בקטע $[-1,1]$. $0\in[-1,1]$

ומתקיים $f'(0)=3\cdot 0^2=0$. אולם, לכל a,b, $a\neq b \Rightarrow a^3\neq b^3$.

לכן אין שתי נקודות a,b כך ש- $f(a)=f(b)$.

<u>משפט הערך הממוצע של לגרנז'</u>: תהי f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה

ב- (a,b). אזי קיימת c כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>תרגיל</u>: תהי f פו' גזירה ב- (a,b), כך ש- $f'(x)=0$ לכל

x בקטע. הוכיחו שf פו' קבועה בקטע.

<u>פתרון</u>: יהיו $x_1\neq x_2$ בקטע. לפי לגרנז' קיים $c\in(x_1,x_2)$ כך ש-

$f'(c)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. אבל $f'(c)=0$ כי $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$. ולכן

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$.

זה נכון לכל 2 נקודות בקטע, לכן הפו' קבועה.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שלכל $b>a>0$ מתקיים $\frac{b-a}{1+b}<\ln\frac{1+b}{1+a}<\frac{b-a}{1+a}$

<u>פתרון</u>: תזכורת: $\ln\frac{y}{x}=\ln y-\ln x$

לכן: $\ln\frac{1+b}{1+a}=\ln(1+b)-\ln(1+a)$

נחלק את כל אגפי האי-שוויון ב- $b-a$ (מותר כי $b\neq a$

ולכן $b-a>0$) ונקבל: $\frac{1}{1+b}<\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}<\frac{1}{1+a}$

וזה בעצם מה שאנחנו רוצים להוכיח.

ניתן לראות שהאגף האמצעי הוא מהצורה $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ כאשר

$f=\ln(1+x)$. ממשפט לגרנז' נקבל שקיים $c\in(a,b)$ כך ש

$$\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}=[\ln(1+x)]'|_c=\frac{1}{1+c}$$

$a<c<b \Rightarrow a+1<c+1<b+1 \Rightarrow \frac{1}{b+1}<\frac{1}{c+1}<\frac{1}{1+a}$

ולכן, $\frac{1}{b+1}<\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}<\frac{1}{1+a}$. מש"ל

<u>גבולות באינסוף</u>

1) נסמן $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$, אם לכל t אינסופי חיובי $f(t)\approx L$

באופן דומה, נסמן $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ אם לכל H אינסופי שלילי $f(H)\approx L$.

נסמן $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ אם לכל $c\neq x\approx c$ f(x) הוא אינסופי חיובי.

באופן דומה, נסמן $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$ אם לכל $c\neq x\approx c$, f(x) הוא אינסופי שלילי.

שימו לב שאפשר להגדיר באותו אופן גם $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ וכו'.

<u>תרגילים:</u> חשב את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$. פתרון: $st\frac{1}{\underbrace{H}_{\text{אינפי'}}}=0$ עבור H אינסופי חיובי.

2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$. פתרון: $st\frac{1}{\underbrace{H}_{\text{אינפי'}}}=0$ עבור H אינסופי שלילי.

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3+1}{2x^4-4x^2+5}$

<u>פתרון:</u> $st\frac{H^4-H^3+1}{2H^4-4H^2+5}=st\frac{1-\frac{1}{H}+\frac{1}{H^4}}{2-\frac{4}{H^2}+\frac{5}{H^4}}=\frac{1}{2}$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2x+\sin x}{x}$

פתרון: $st\underbrace{\frac{\overbrace{\cos^2H+\sin H}^{\text{סופי}}}{\underbrace{H}_{\text{אינסופי}}}}_{\text{אינפי'}}=0$

5. $\lim_{x\to\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}$

<u>פתרון:</u> $st\underbrace{\sin H}_{\text{סופי}}\underbrace{\sin\frac{1}{H}}_{\text{אינפי'}}=0$

6. $\lim_{x\to\infty}\ln x$.

<u>פתרון:</u> אנחנו צריכים להסתכל על $\ln H$ עבור H אינסופי חיובי.

לכל r ממשי, ידוע ש- e^r ממשי חיובי.

לכן $H>e^r$ לכל r ממשי ([illegible]!)

$\Downarrow$

$r=\ln e^r<\ln H$ לכל r ממשי.

לכן $\ln \varepsilon$ הוא אינסוף שלילי.

ומסמנים, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

7. $\lim_{x\to\infty} x\sin x$

פתרון: אם נציב $2\pi N = H$ עבור N היפר-שלם אינסופי

נקבל $f(H) = 2\pi N \cdot \sin 2\pi N = 2\pi N \cdot 0$

(אנחנו יודעים ש-$\sin 2\pi N = 0$ לכל n שלם, לפי עקרון ההרחבה זה נכון

גם לכל מס׳ היפר-ממשי שלם)

מצד שני, אם נקח $H = 2\pi N + \frac{\pi}{2}$ נקבל:

$$f(H) = (2\pi N + \tfrac{\pi}{2})\sin(2\pi N + \tfrac{\pi}{2}) = (2\pi N + \tfrac{\pi}{2})\cdot 1$$

אינסוף חיובי.

ואם נקח $H = 2\pi N + \frac{3\pi}{2}$ נקבל:

$$f(H) = (2\pi N + \tfrac{3\pi}{2})\sin(2\pi N + \tfrac{3\pi}{2}) = (2\pi N + \tfrac{3\pi}{2})(-1)$$

אינסוף שלילי.

(קיבלנו שאין גבול כי הוא תלוי בבחירת H)

8. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$

פתרון: $st\,\frac{\sqrt{H^2+1}}{-2H} = st\,\frac{\sqrt{H^2+1}\cdot\frac{1}{H}}{-2H\cdot\frac{1}{H}} = st\,\frac{\sqrt{1+\frac{1}{H^2}}}{-2} = -\frac{1}{2}$

עבור H אינסוף חיובי (ולכן הצבנו $-H$)

9. $\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$

פתרון: $f(H) = H\cdot\left[\frac{1}{H}\right]$. $\frac{1}{H}$ הוא אינפי׳, ולכן $\left[\frac{1}{H}\right] = 0$, לכן

$f(H) = H\cdot 0 = 0$

$st\, f(H) = 0$

כלומר $\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

10. $\lim_{x\to\infty} \cos x \sin x$

פתרון: $\cos x\sin x = \frac{\sin 2x}{2}$

I. נקח $H = \pi N$

$$\frac{\sin 2\pi N}{2} = 0$$

II נקח $x_N = \pi N + \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\sin\left(2\pi N + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

לכן אין גבול (תלוי בבחירת דן)

<u>תרגיל:</u> הוכח אם $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ אז $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0$

<u>פתרון:</u> $f(c+\Delta x)$ הוא אין סופי גדול. לכן $\frac{1}{f(c+\Delta x)}$ הוא אינפי',

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = st\,\frac{1}{f(c+\Delta x)} = 0$$