משפט פרון

נעם ליפשיץ ובועז צבאן

23 בפברואר 2012

סיכום זה מציג את משפט פרון, המשפט עליו מבוסס מנוע החיפוש גוגל, עם הוכחות מלאות. ההוכחות מאד יפות, בין השאר משום שהן משלבות את שני הקורסים הבסיסיים בשנה א' של תואר ראשון: אלגברה לינארית וחשבון אינפיניטסימלי, ובכך מראות שתחומי המתמטיקה קשורים זה בזה ומועילים זה לזה.

הסיכום הוא על פי הספר **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra** של Carl D. Meyer.

1 הרדיוס הספקטרלי של מטריצה

הגדרה 1.1 גם אם לא נציין זאת במפורש בהמשך, כל המטריצות בסיכום זה הן מטריצות ריבועיות מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

עבור $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ נאמר ש $A > B$ אם $\forall i,j : a_{ij} > b_{ij}$. אם $A > O$ נסמן $A > 0$ ונאמר ש A חיובית. באופן דומה, נגדיר $A \geq B$ ו $A \geq 0$.

למה 1.2 עבור $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1. אם $0 < A$, ו $\vec{0} \neq v \geq 0$ אז $Av > 0$.
2. אם $A \geq 0, u \geq v$ אז $Au \geq Av$.
3. אם $A > 0, u > v$ אז $Au > Av$.

הוכחה: נוכיח את (1). יהי $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. מכיון ש $v \neq 0$ נקבל ש $\exists j : \alpha_j \neq 0$ ולכן נקבל

$$Av = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i \geq \alpha_j A e_j > 0$$

את השאר תוכיחו לבד ;) ■

הגדרה 1.3 הספקטרום של מטריצה A, המסומן $\sigma(A)$, הוא קבוצת כל הערכים העצמיים של A.

הרדיוס הספקטרלי של מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מוגדר להיות $\max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ והוא מסומן $r(A)$.[1]

נשים לב ש $r(A) \geq 0$, ושויון מתקיים רק אם 0 הוא הערך העצמי היחיד של A.

למה 1.4 הרדיוס הספקטרלי של כל מטריצה חיובית הוא חיובי.

הוכחה: נניח בשלילה $r(A) = 0$ נקבל שמעל $\mathbb{C}$, 0 הוא ערך עצמי יחיד ולכן $f_A(x) = x^n$. ממשפט קיילי-המילטון נקבל ש A נילפוטנטית, בסתירה לכך שA חיובית. ■

למה 1.5 תהי A מטריצה חיובית. נסמן $A' := \frac{1}{r(A)} A$. אזי $r(A') = 1$.

---

[1] הרדיוס ספקטרלי של מטריצה מעל $\mathbb{R}$ מוגדר להיות הרדיוס של המטריצה מעל $\mathbb{C}$

הוכחה: תהי J צורת ג'ורדן של A (מספיק לקחת מטריצה משולשית כלשהי J הדומה ל A). $A = PJP^{-1}$ עבור P הפיכה, לכן $A' = \frac{1}{r(A)}A = \frac{1}{r(A)}PJP^{-1} = P\frac{1}{r(A)}JP^{-1}$, כלומר A' דומה למטריצה המשולשית $\frac{1}{r(A)}J$, וערכיה העצמיים הם אברי האלכסון שלה.

אברי האלכסון של J הם הערכים העצמיים של A. לכן, הערכים העצמיים של A' הם $\frac{1}{r(A)}\lambda$ כאשר $\lambda \in \sigma(A)$. לכן,

$$r(A') = \max\left\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(A')\right\} = \max\left\{\left|\frac{1}{r(A)}\lambda\right| \,:\, \lambda \in \sigma(A)\right\} = \max\left\{\frac{1}{r(A)}|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(A)\right\} = \frac{1}{r(A)}r(A) = 1.$$

■

לכן, אפשר לנרמל כל מטריצה חיובית, כלומר לחלק ברדיוס הספקטרלי, $A' := \frac{1}{r(A)}A$, ולקבל $r(A') = 1$.

2 נורמת אינסוף של מטריצה

הגדרה 2.1 $\|A\|_\infty := \max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$. לשם קיצור, נכתוב להלן $\|A\|$ (ללא האינדקס ∞) במקום $\|A\|_\infty$.

דרך אגב, ההגדרה נותנת נורמה על מרחב המטריצות המרוכבות $\mathbb{C}^{n\times n}$.

למה 2.2 עבור $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מתקיים $\|AB\| \le n\|A\|\|B\|$.

הוכחה: לכל i, j, כתוצאה מאי שיוויון המשולש, מתקיים:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \le \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}| \le \sum_{k=1}^{n}\|A\|\|B\| = n\|A\|\|B\|$$

לכן, המקסימום על פני כל הזוגות i, j, שהוא $\|AB\|$, חסום על ידי $n\|A\|\|B\|$. ■

מסקנה 2.3 יהיו A, B מטריצות דומות. אזי:

1. $\left\|A^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ אם ורק אם $\left\|B^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
2. $\left\|A^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ אם ורק אם $\left\|B^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

הוכחה: תהי P מטריצה הפיכה כך ש $B = P^{-1}AP$. לכל k מתקיים $B^k = P^{-1}A^kP$.

(1) על פי הפעלת הלמה פעמיים

$$\left\|B^k\right\| = \left\|P^{-1}A^kP\right\| \le n^2\left\|P^{-1}\right\|\left\|A^k\right\|\|P\| = \underbrace{n^2\left\|P^{-1}\right\|\|P\|}_{c}\left\|A^k\right\|.$$

בגלל ש $\left\|A^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ו $c := n^2\left\|P^{-1}\right\|\|P\|$ קבוע, נקבל

$$0 \le \left\|B^k\right\| \le c\left\|A^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

ולכן על פי כלל הסנדוויץ' $\left\|B^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

(2) $A = PBP^{-1}$. לכן,

$$\left\|A^k\right\| = \left\|PB^kP^{-1}\right\| \le n^2\|P\|\left\|B^k\right\|\left\|P^{-1}\right\| = \underbrace{n^2\|P\|\left\|P^{-1}\right\|}_{c}\left\|B^k\right\|$$

כיון ש P הפיכה, בפרט $P \ne O$ ולכן $\|P\| > 0$. מאותה סיבה, גם $\left\|P^{-1}\right\| > 0$ ולכן $c > 0$. לכן,

$$\left\|B^k\right\| \ge \frac{1}{c}\left\|A^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

ולכן $\left\|B^k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. ■

למה 2.4 **(חזקות של בלוק ג'ורדן)** יהי $J_m(\lambda)$ בלוק ג'ורדן כלשהו. לכל $m-1 \leq k$ מתקיים

$$J_m(\lambda)^k = \sum_{l=0}^{m-1} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \lambda^{k-l} J_m\left(0\right)^l = \begin{pmatrix} \lambda & k\lambda^{k-1} & \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}\lambda^{k-2} & \cdots & \begin{pmatrix} k \\ m-1 \end{pmatrix}\lambda^{k-(m-1)} \\ & \lambda & k\lambda^{k-1} & \ddots & \vdots \\ & & \lambda & \ddots & \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}\lambda^{k-2} \\ & & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

הוכחה: נשים לב ש

$$J_m(\lambda) = \lambda I + J_m\left(0\right)$$

כיון שמטריצה סקלרית λI מתחלפת עם כל מטריצה B, מתקיים הבינום של ניוטון

$$\left(\lambda I + B\right)^k = \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \lambda^{k-l} I \cdot B^l = \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \lambda^{k-l} \cdot B^l$$

לכל מטריצה B, ובפרט עבור המטריצה $B = J_m(0)$ נקבל

$$J_m(\lambda)^k = \left(\lambda I + J_m(0)\right)^k = \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \lambda^{k-l} J_m\left(0\right)^l.$$

כיון שבמקרה זה $B^l = O$ לכל $m \leq l$, נקבל שכאשר $m-1 \leq k$, .

$$J_m(\lambda)^k = \sum_{l=0}^{m-1} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \lambda^{k-l} J_m\left(0\right)^l.$$

■

למה 2.5 **(ניתוח התכנסות של $\left\|A^k\right\|$)** תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. אם $r\left(A\right) > 1$, אז $\left\|A^k\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
2. אם $r\left(A\right) < 1$ אזי $\left\|A^k\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$
3. אם $r\left(A\right) = 1$, ויש ערך עצמי λ עם $|\lambda| = 1$, שהריבוי הגאומטרי שלו קטן מהריבוי האלגברי שלו, אז $\left\|A^k\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

הוכחה: תהי J צורת ג'ורדן של A.

(1) נניח ש $r\left(A\right) > 1$. יהי λ ערך עצמי של A עם $|\lambda| = r(A)$. כיון שערך עצמי זה מופיע באלכסון של J ו J משולשית, λ^k מופיע באלכסון של J^k ולכן

$$\left\|J^k\right\| \geq \left|\lambda^k\right| = |\lambda|^k = r\left(A\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ולכן $\left\|J^k\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. כיון ש J דומה ל A, גם $\left\|A^k\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

(2) נניח ש $r\left(A\right) < 1$. כיון ש J דומה ל A, מספיק להראות ש $\left\|J^k\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. כיון שכל רכיב מחוץ לבלוקי ג'ורדן המופיעים ב J הוא 0, וכך גם לגבי כל חזקה של J, מספיק להראות ש $\left\|J_m(\lambda)^k\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ לכל בלוק ג'ורדן ב J. מהלמה על חזקות של בלוק ג'ורדן, כיון ש $|\lambda| \leq r\left(A\right) < 1$,

$$\left\|J_m(\lambda)^k\right\| \leq k^m \left|\lambda^{k-(m-1)}\right| = k^m \left|\lambda\right|^{k-(m-1)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;.$$

הסיבה שהביטוי מימין שואף לאפס היא, שעבור $0 \leq \delta := |\lambda| < 1$, δ^k שואף לאפס הרבה יותר מהר ממהירות השאיפה של k^m (פולינום ב k) לאינסוף. דרך אחת לראות זאת: $k^m \delta^{k-(m-1)} = \frac{1}{\delta^{m-1}} \left(\left(k^{\frac{1}{k}} \right)^m \delta \right)^k$, וכידוע, $k^{\frac{1}{k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

(3) כיון שהריבוי האלגברי שונה מהריבוי הגאומטרי, יש בלוק $J_m(\lambda)$ כך ש $m > 1$. כיון ש $|\lambda| = 1$,

$$\left\| J^k \right\| \geq \left\| J_m\left(\lambda\right)^k \right\| \geq \left| k\lambda^{k-1} \right| = k \left|\lambda\right|^{k-1} = k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ .}$$

■

3 משפט פרון

הגדרה 3.1 $|A|$ מוגדרת להיות המריצה שרכיביה הם $|a_{ij}|$. כשנשתמש בסימון מהצורה $|*|$, תמיד נתכוון למטריצת הערכים המוחלטים ולא לדטרמיננטה.

למה 3.2 תהי A מטריצה חיובית. אזי $|Av| \leq A\,|v|$.

הוכחה: יהי $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כתוצאה מאי שיוויון המשולש,

$$|Av| = \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A e_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\,|Ae_j| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\, Ae_j = A\,|v|$$

■

למה 3.3 תהי A מטריצה ריבועית כך ש $A > 0$, ויהי $\rho = r(A)$ ויהי $\lambda \in \sigma\left(A\right)$ כך ש $\rho = |\lambda|$. אזי:

1. ρ הוא ערך עצמי של A.
2. לכל $\vec{0} \neq v \in V_\lambda$ מתקיים $0 < |v| \in V_\rho$.

הוכחה: (1) בגלל שאפשר לנרמל כל מטריצה ההנחה $\rho = r\left(A\right) = 1$ לא מגבילה את הכלליות. יהי λ ערך עצמי של A כך ש $|\lambda| = 1$. יהי $\vec{0} \neq v \in V_\lambda$. אזי

$$A\,|v| \geq |Av| = |\lambda v| = |\lambda|\,|v| = |v| = 1\,|v| \text{ ,}$$

כיון ש $A > 0$. אז $A\,|v| - |v| \geq 0$. נניח בשלילה ש $A\,|v| - |v| \neq \vec{0}$. מלמה 1.2(1), $A(A\,|v| - |v|) > 0$, ולכן יש $0 < \epsilon$ כך ש

$$A^2\,|v| - A\,|v| = A(A\,|v| - |v|) > \epsilon A\,|v|$$

ולכן $A^2\,|v| > (1+\epsilon)A\,|v|$, כלומר הוקטור $u := A\,|v|$ מקיים $\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right) u > u$. מלמה 1.2(3),

$$u < \left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right) u < \left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^2 u < \left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^3 u < \dots$$

כיון ש $r\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right) = \frac{1}{1+\epsilon} r(A) = \frac{1}{1+\epsilon} < 1$, ולכן $\left\| \left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^k \right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ולכן נקבל

$$0 < \|u\| < \left\| \left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^k u \right\| \leq n\,\|u\| \left\| \left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)^k \right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

שזו סתירה כי u וקטור קבוע. לכן, בהכרח $A|v| = |v|$ ולכן $\rho = 1$ ערך עצמי ו $|v| \in V_\rho$.

(2) לסיום, לכל $v \in V_1$, כיון ש $\vec{0} \neq |v| \geq 0$, מתקיים $|v| = A|v| > 0$ ולכן $|v| > 0$ וכך גם $|v| \in V_1$. ■

למה 3.4 תהי A מטריצה ריבועית חיובית, ויהי $\rho = r(A)$. אזי:

1. לכל ערך עצמי אחר λ של A מתקיים $\rho > |\lambda|$.
2. הריבוי האלגברי והגאומטרי של ρ שווים.

הוכחה: נניח, בלי הגבלת הכלליות, ש $\rho = r(A) = 1$.

(1) נניח בשלילה שיש $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{1\}$ כך ש $|\lambda| = 1$. יהי $v \in V_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. הראינו, במהלך ההוכחה הקודמת, שבמקרה זה $A|v| = |Av|$ וכן $|v| > 0$. בפרט,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}|\alpha_i|.$$

לכל $i = 1, \ldots, n$ נכתוב $\alpha_i = |\alpha_i| \operatorname{cis}\theta_i$, $d_i := a_{1i}|\alpha_i| > 0$. אז

$$\left|\sum_{i=1}^{n} d_i \operatorname{cis}\theta_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{1i}|\alpha_i| \operatorname{cis}\theta_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}|\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

השוויון אפשרי רק כאשר כל הזויות θ_i זהות.[2] תהי θ הזוית המשותפת. אז $u := \frac{1}{\operatorname{cis}\theta}v = |v| > 0$ ו $u \in V_\lambda$ (כפל של $v \in V_\lambda$ בסקלר) אבל על פי 3.3 $u \in V_\rho$ ולכן $\lambda = \rho$.

(2) נזכור שבלי הגבלת הכלליות, $\rho = 1$. נניח שהריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 1 קטן מהריבוי האלגברי שלו. על פי מקרה (3) של הלמה על ניתוח התכנסות, $\left\|A^k\right\| \to \infty$. יהי $0 < v \in V_1$. אז

$$v = Av = A^2v = \cdots.$$

יהי r הרכיב הקטן ביותר של v. אז לכל מטריצה B, $\|Bv\| \geq r\|B\|$ (בדוק!), ולכן אצלנו

$$\|v\| = \left\|A^k v\right\| \geq r\left\|A^k\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

כי $r > 0$, בסתירה לכך ש $\|v\|$ קבוע. ■

למה 3.5 תהי A מטריצה ריבועית חיובית. הריבוי האלגברי של הערך העצמי $\rho = r(A)$ הוא 1.

הוכחה: כרגיל, אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות ש $\rho = 1$. מהלמה הקודמת, הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 1 שווה לריבוי האלגברי שלו. לכן, מספיק להראות שהריבוי הגאומטרי של 1 הוא 1.

יהיו

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{u}, \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{v} \in V_1$$

וקטורים שאינם $\vec{0}$. מלמה 3.3(2), כל רכיבי וקטורים אלה שונים מאפס, ובפרט $\beta_1 \neq 0$. כיון שמרחב וקטורי סגור לצירופים ליניארים, גם

$$u - \frac{\alpha_1}{\beta_1}v = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \in V_1.$$

---

[2] מהנתון ומאי־שויון המשולש,

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = |d_1 \operatorname{cis}\theta_1 + \cdots + d_n \operatorname{cis}\theta_n| \leq |d_1 cis\theta_1 + d_2 \operatorname{cis}\theta_2| + |d_3 cis\theta_3| + \cdots + |d_n cis\theta_n| = |d_1 \operatorname{cis}\theta_1 + d_2 \operatorname{cis}\theta_2| + d_3 + \cdots + d_n$$

ולכן $d_1 + d_2 = |d_1 \operatorname{cis}\theta_1 + d_2 \operatorname{cis}\theta_2|$. אבל בגלל שצלע במשולש קטנה מסכום 2 הצלעות האחרות זה חייב להיו משולש מנוון, כלומר $d_1 cis\theta_1, d_2 \operatorname{cis}\theta_2$ הם באותו כיוון, כלומר הזויות שוות. באותו אופן נקבל שכל שתי זויות מתוך ה n הנתונות הן שוות.

מלמה 3.3(2) שוב, אילו הוקטור הזה היה שונה מ $\vec{0}$, היו כל רכיביו שונים מאפס, בסתירה למה שעינינו רואות. לכן, $u-\frac{\alpha_1}{\beta_1}v=\vec{0}$ ולכן $u=\frac{\alpha_1}{\beta_1}v$. לסיכום, כל שני וקטורים ב V_1 הם תלויים לינארית, ולכן מימדו 1. ∎

למה 3.6 תהי A מטריצה ריבועית חיובית, ויהי $\rho=r(A)$. אזי כל וקטור עצמי $0\le v$ שייך ל V_ρ.

הוכחה: (נשים לב שכל וקטור עצמי אי שלילי הוא חיובי) נניח $0<v\in V_\lambda$. $Av=\lambda v$, לכן

$$.v^tA^t=(Av)^t=(\lambda v)^t=\lambda v^t$$

כיון ש $0<A$, גם $0<A^t$. ל A,A^t אותם ערכים עצמיים, ובפרט $\rho=r(A)=r(A^t)$. יהי u וקטור עצמי חיובי של A^t עם ערך עצמי ρ. נכפול את אגפי המשוואה לעיל ב u מימין, לקבל

$$.\rho v^tu=v^t\rho u=v^tA^tu=\lambda v^tu$$

כיון ש $0<u,v$, גם $0<v^tu$ ולכן $\rho=\lambda$, כלומר $v\in V_\rho$. ∎

הגדרה 3.7 וקטור פרון מסומן $\vec{p}_A$ והוא הוקטור העצמי של הערך העצמי $r(A)$ המקיים:

1. $\vec{p}_A>0$.
2. סכום רכיבי $\vec{p}_A$ הוא 1.

תרגיל: הוכח, בעזרת הלמות הקודמות, שוקטור פרון של מטריצה ריבועית חיובית קיים ויחיד.

לסיכום, קיבלנו את המשפט הבא.

משפט 3.8 (פרון) תהי A מטריצה ריבועית חיובית של מספרים ממשיים. אזי יש ל A ערך עצמי ρ, ולו וקטור עצמי יחיד $\vec{p}$ כך ש:

1. $0<\rho$.
2. לכל ערך עצמי אחר λ של A, $|\lambda|<\rho$.
3. הריבוי האלגברי של ρ הוא 1.
4. כל רכיבי $\vec{p}$ חיוביים, וסכומם הוא 1 (וקטור פרון).
5. כל וקטורים עצמי חיובי של A מתקבל מ $\vec{p}$ על ידי כפל בסקלר חיובי.

תרגילים

1. מטריצה A שסכום רכיבי כל עמודה שלה הוא 1 נקראת מטריצת מרקוב. מצא את הרדיוס הספקטרלי של A.
2. ודא את משפט פרון עבור המטריצה $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ כלומר:
   (א) מצא את הרדיוס הספקטרלי ווודא ש:
      i. הרדיוס הספקטרלי חיובי.
      ii. הראה שהריבוי האלגברי שלו 1.
      iii. והראה שהערכים המוחלטים של שאר הוקטורים העצמיים קטנים ממנו.
   (ב) מצא את וקטור פרון.
   (ג) הראה שכל שאר הערכים העצמיים לא חיוביים.
3. הפרך את הטענות הבאות עבור מטריצה אי שלילית $0\le A$:
   (א) $r(A)>0$.
   (ב) הריבוי הגאומטרי של $r(A)$ הוא 1.
   (ג) החזקה של $x-r(A)$ בפולינום המינימלי היא 1.
   (ד) לכל ערך עצמי λ שונה מהרדיוס הספקטרלי $|\lambda|<r$.
   (ה) קיים וקטור עצמי חיובי.

רמז: קח מטריצות 2×2 ואם קשה לך לנחש, קח מטריצה הפיכה כללית והשתמש בשיטת מצליח.