מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 11 (פתרון)

1. נוכיה ש-d רציפה בכל נקודה $(a,b)\in M\times M$. נסמן: $d(a,b)=r$
תהי V סביבה של r ב-$\mathbb{R}$. אזי קיים $\varepsilon>0$
כך ש-$(r-\varepsilon,r+\varepsilon)\subseteq V$. לפי שוויון
המשולש לכל $x,y\in M$:
$d(x,y)\le d(x,a)+d(a,b)+d(y,b)$ ו-
$d(a,b)\le d(x,a)+d(x,y)+d(y,b)$
לכן:
$d(x,y)-r\le d(x,a)+d(y,b)$ ו-
$r-d(x,y)\le d(x,a)+d(y,b)$
אזי:
$|d(x,y)-r|\le d(x,a)+d(y,b)$
מזה נובע ש-
$(x,y)\in B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times B\left(b,\frac{\varepsilon}{2}\right)\Rightarrow$
$d(x,y)\in(r-\varepsilon,r+\varepsilon)\subseteq V$, או סופית:
$d\left(B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times B\left(b,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\subseteq V$.
מכיוון ש-$B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times B\left(b,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ פתוחה
בטופולוגית המכפלה $M\times M$,
d רציפה ב-(a,b), מש"ל.

2. ראינו בהאצאה שקיים שיכון:

$$i: F \to \{a\} \times F$$

כך ש- $i(x) = (a, x)$ לכל $x \in F$.

נסמן: $\rho(x) := d(a, x)$ כאשר $x \in F$. אזי $\rho: F \to \mathbb{R}$ פונקציה ו- $\rho = d|_{\{a \times F\}} \circ i$.

התרגיל הקודם מאפשר להסיק ש- ρ רציפה.
הוכחנו קודם שפונקציה רציפה מקבלת ערך מינימלי על קבוצה קומפקטית. לכן קיים $x_0 \in F$ כך ש- $\rho(x_0) = \min_{x \in F} \rho(x)$, או

$$d(a, x_0) = \min_{x \in F} d(a, x) = \inf_{x \in F} d(a, x)$$

מש"ל.

3. כדי למנוע דו-משמעות נסמן את ההטלות מהמכפלה כ- $\widehat{p_i}$ גדיר פונקציבה:

$$\varphi: (X_1 \times \dots \times X_n, \tau) \to (X_1 \times \dots \times X_n, \tau_\times)$$

כפונקצית זחות:

$$\varphi\big((x_1, \dots, x_n)\big) = (x_1, \dots, x_n).$$

אזי $p_i = \widehat{p_i} \circ \varphi$. מכיוון ש-p_i רציפות מהתנאי, גם φ רציפה (משפט מההרצאה). לכן

אם $W \in \tau_\times$, אז $\tau \ni W = \varphi^{-1}(W)$.

לכן $\tau_\times \subseteq \tau$, מש"ל.

4. א') קל לבדוק בחישוב ישיר.
ב') א' , רציפות של p_i ומשפט מההרצאה ⇐ ב')
ג') א' מגדיר היטב את הקומפוננטה ה-i
של $\varphi(y)$.

5. <u>שלב 1</u>. נקח בתור Y את מרחב המכפלה
$X_1 \times \ldots \times X_n$ ובתור f_i את
ההטלות $\widehat{p_i}: X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$.
אזי לפי התנאי (2) קיימת פונקציה
רציפה $\psi: X_1 \times \ldots \times X_n \to \Pi$ כך
ש-$\widehat{p_i} = p_i \circ \psi$. (*)
<u>שלב 2.</u> נקח בתור Y את Π עצמו
ובתור f_i את p_i. אזי אפשר לקחת Id_Π במקום
ψ, כי $p_i = p_i \circ Id_\Pi$. (**)

<u>שלב 3.</u> בזכות תכונות מרחב המכפלה שהוכחו
בשאלה 4, קימת פונקציה רציפה
$\varphi: \Pi \to X_1 \times \ldots \times X_n$ כך ש-$p_i = \widehat{p_i} \circ \varphi$.(***)
מ-(*) ו-(***) נובע: $\boldsymbol{p_i = p_i \circ (\psi \circ \varphi)}$**,**
ו-$\boldsymbol{\widehat{p_i} = \widehat{p_i} \circ (\varphi \circ \psi)}$.
ובגלל תנאי היחידות ו-(**)
מקבלים: $\boldsymbol{\psi \circ \varphi = Id_\Pi}$

שלב 4. ברור גם ש- $\boldsymbol{\widehat{p_\iota} = \widehat{p_\iota} \circ Id_{X_1 \times \ldots \times X_n}}$.
לכן (יחידות משאלה 4, ג') מקבלים:
$\boldsymbol{\varphi \circ \psi = Id_{X_1 \times \ldots \times X_n}}$. ביחד עם
$\psi \circ \varphi = Id_\Pi$ זה מוכיח ש- $X_1 \times \ldots \times X_n$
הומאומורפי ל- Π , מש"ל.