בדידה - הרצאה 1

פסוק

יחידת התוכן הבסיסית היא פסוק, כאשר פסוק יכול לקבל שני ערכים: אמת ושקר.
לשם קיצור נסמן פסוק אמת ב T ופסוק שקר ב F.

קשרים לוגים

וגם – נניח ש A ו B הם פסוקים אז נאמר ש A וגם B פסוק אמת רק אם A פסוק אמת וגם B פסוק אמת.

דוגמה

A - קיבלתי מעל 90 במבחן. B - המבחן התחיל בשעה שמונה בבוקר.
הפסוק A וגם B הוא פסוק אמת רק אם קיבלתי מעל 90 במבחן וגם המבחן התחיל בשמונה בבוקר.

סימון

$A \wedge B$

נוכל להראות את כל האפשרויות בעזרת טבלה שנקראת טבלת אמת

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

או - נניח ש A ו B הם פסוקים אז נאמר ש A או B פסוק אמת אם לפחות אחד מהפסוקים A, B הוא פסוק אמת.

סימון

$A \vee B$

דוגמה

בדוגמה הקודמת אם המבחן התחיל בשמונה אז הפסוק $A \vee B$ הוא פסוק אמת ולא משנה מה הציון שקיבלתי.
אם קיבלתי מעל 90 הפסוק $A \vee B$ הוא פסוק אמת ולא משנה באיזה שעה התחיל המבחן.

נציג את כל האפשרויות באמצעות טבלת אמת

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

לא – נניח ש A פסוק אז נאמר שלא A פסוק אמת רק אם A פסוק שקר. סימון $\neg A$

דוגמה

A - קיבלתי מעל 90 במבחן. הפסוק לא A הוא פסוק אמת רק אם קיבלתי לכל היותר 90.
נציג את כל האפשרויות בעזרת טבלת אמת.

P	$\neg P$
F	T
T	F

אם –אז - - נניח ש A ו B הם פסוקים אז נאמר ש אם A אז B פסוק אמת רק כאשר הפסוק A נכון אז הפסוק B.
שימו לב שאם הפסוק A שקרי אז בהכרח הפסוק אם A אז B הוא פסוק אמת.
סימון $A \to B$.
דוגמה
אם אני אנצח בתחרות אז אני אקבל פרס.
נסמן A -ניצחתי בתחרות, B - קיבלתי פרס. הפסוק הלוגי המתאים הוא $A \to B$

נראה את כל האפשרויות באמצעות טבלת אמת

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

ז"א הפסוק $A \to B$ הוא פסוק שקר רק אם הפסוק A הוא פסוק אמת והפסוק B הוא פסוק שקר.

שלילת טענה
הפסוק $A \to B$ שקול לפסוק $\neg B \to \neg A$ מכיוון שאם הפסוק $A \to B$ הוא פסוק אמת והפסוק B הוא פסוק שקר אז בהכרח שהפסוק A הוא פסוק אמת ולכן גם הפסוק $\neg B \to \neg A$ הוא פסוק אמת.

אם ורק אם - נניח ש A ו B הם פסוקים אז נאמר ש A אם ורק אם B פסוק אמת אם הפסוק $(A \to B) \wedge (B \to A)$ הוא פסוק אמת.

נראה את כל האפשרויות באמצעות טבלת אמת

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

דוגמה
המרובע הוא מלבן אם ורק אם כל זוויותיו ישרות.
טאוטולוגיה
פסוק שערך האמת שלו הוא תמיד T נקרא טאוטולוגיה.
דוגמה
$A \wedge B \to A$ הוא טאוטולוגיה מכיוון שערך האמת שלו הוא תמיד T.
נראה את כל האפשרויות בטבלת אמת

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \to A$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

הגדרה

הפסוקים A, A' הם שקולים אם הפסוק $A \leftrightarrow A'$ הוא טאוטולוגיה. סימון $A \equiv B$

אם $A \to B$ הוא טאוטולוגיה אז אומרים כי A הינו תנאי מספיק ל B ואילו B הוא תנאי הכרחי ל A.
אם הפסוקים A, B שקולים אז A הוא תנאי הכרחי ומספיק ל B.

חוקי דה מורגן

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

נראה את השקילות בעזרת טבלאות אמת

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	F

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

ניתן לראות את השקילות $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ באמצעות הטבלאות אמת.

באותו אופן ניתן להראות באמצעות טבלאות אמת את השקילות $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

דוגמה

תשובה שלילית לשאלה "האם עבר כאן קו 45 או קו 7" פירושה "לא עבר כאן רו 45 וגם לא עבר כאן קו 7"

כמתים

ישנם שני כמתים:
"לכל" סימון $\forall$.
"קיים" סימון $\exists$.

דוגמאות

1. ניתן לרשום הפונקציה שלילית לכל x באופן הבא: $\forall x\left(f(x)<0\right)$.
2. אם קיים ערך של x שעבורו הפונקציה חיובית - $\exists x\left(f(x)>0\right)$.

כיצד נוכיח או נסתור טענה

- כדי להוכיח שהפסוק $\forall x : P(x)$ אמיתי, יש להראות שהטענה P נכונה לכל ערך אפשרי של x.
- כדי להוכיח שהפסוק $\exists x : P(x)$ אמיתי, יש למצוא ערך של x שעבורו הטענה נכונה (דוגמה)

שלילת כמתים

כדי לשלול פסוק שבו הפעולה האחרונה היא כמת יש לשלול את הפסוק עבור הכמת השני.
ז"א

$\neg\forall : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$

$\neg\exists : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

<u>דוגמאות</u>

1. כדי להראות שהפונקציה לא שלילית לכל x יש להראות שקיים x שעבורו הפונקציה אי שלילית.
2. כדי להראות שלא קיים ערך של x שעבור הפונקציה שלילית יש להראות שלכל x הפונקציה אי שלילית.

<u>הוכחות</u>

הוכחה פורמלית של פסוק P הוא רצף של פסוקים $P_1,...,P_n$ שכל אחד מהם הוא או אקסיומה, או שאפשר לגזור אותו באופן פורמלי מפסוקים קודמים.

הוכחה בדרך השלילה

מכיוון שהפסוק $A \to B$ שקול לפסוק $\neg B \to \neg A$ אז כדי להוכיח את הפסוק $A \to B$ מספיק להוכיח את הפסוק $\neg B \to \neg A$.

<u>דוגמה</u>

נוכיח ש $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונאלי.

נניח בשלילה ש $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונאלי ז"א קיים שבר מצומצם $\frac{p}{q}$ כך ש $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ ז"א $\frac{p^2}{q^2} = 2$.

$p^2 = 2q^2$ ז"א p זוגי ולכן $p = 2p'$ ולכן מתקיים $2p'^2 = q^2$ בסתירה לכך שהשבר הייה מצומצם.

<u>הפרכה</u>

הפרכה של טענה אינה אלא הוכחה שהטענה אינה נכונה.

נבחין בין שני מקרים:

1. כדי להפריך את הטענה $\forall x : P(x)$ יש להראות שקיים x שעבורו הטענה $P(x)$ אינה נכונה.
2. כדי להפריך את הטענה $\exists x : P(x)$ יש להראות שלכל x הטענה $P(x)$ אינה נכונה.