תירגול 6 ־ סדרות וטורי פונקציות

13 במאי 2014

הגדרה: תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות המוגדרות בתחום $B\subseteq\mathbb{R}$. יהא $x_0\in B$ אזי $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סידרה של נקודות. אם קיים $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$ נסמנו $f(x_0)$.

תהא A קבוצת כל הנקודות שסדרת הפונקציות מתנכנסת בהם. A נקראת תחום ההתכנסות של הסדרה. בנוסף נסמן $\forall x\in A:\ \lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

$f(x)$ נקראת פונקצית הגבול.

דוגמא: $f_n(x)=x^n$ בקטע ב $[-1,1]$.

אזי
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0 & |x|<1\\ 1 & x=1\\ undefined & x=-1\end{cases}$$

הגדרה: תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות המוגדרות בתחום $B\subseteq\mathbb{R}$. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים שלה (סס"ח) $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ המוגדרת $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$. את פונקציות הגבול נסמן $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$.

דוגמא: $f_n(x)=x^n$ בקטע ב $[-1,1]$.אזי

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & |x|<1\\ \infty & x=1\\ undefined & x=-1\end{cases}$$

התכנסות במ"ש

הגדרה: תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות עם תחום התכנסות A ופונקצית גבול $f(x)$. נאמר שההתכנסות היא במידה שווה אם

$$\forall\epsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0,x\in A:|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

דוגמא: $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$ בכל הישר מתכנסת ל $f(x)=0$. טענה: ההתכנסות במ"ש :
הוכחה־ עבור $\epsilon>0$ נבחר $n_0>\frac{1}{\epsilon}$ ואז לכל $n>n_0$ ו־ x ממשי מתקיים

$$\frac{1}{x^2+n}<\frac{1}{x^2+n_0}<\frac{1}{n_0}<\epsilon$$

דוגמא: $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ בקטע $[0,1]$ מתכנסת ל $f(x)=0$ אבל ההתכנסות אינה במ"ש כי עבור $\epsilon=\frac{1}{4}$ (למשל) לכל n נוכל לקחת $x=2^{-\frac{1}{n}}$

$$f_n(x)=\frac{1}{4}\not<\epsilon$$

.

הגדרה (בטורים): תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות עם סס"ח $\{S_n(x)\}$ שלה תחום התכנסות A ופונקצית גבול $S(x)$. נאמר שההתכנסות היא במידה שווה אם

$$\forall\epsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0,x\in A:|S(x)-S_n(x)|=|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)|=|\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(x)|<\epsilon$$

משפט (מבחן M של וירשטרס): אם קיימת סדרת מספרים $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש $|f_k(x)|\le a_k$ (לכל $x\in A$) וגם $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$ אז הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש ב - A.

דוגמא: הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^n(x)}{n^2}$ מתכנס במ"ש בקטע $[-1,32]$ כי מתקיים שם $|\frac{\sin^n(x)}{n^2}|\le\frac{1}{n^2}$ וטור המספרים $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ מתכנס.

קריטריון נוסף להתכנסות במ"ש (ה"$\lim-\sup$"):
תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות עם תחום התכנסות A ופונקצית גבול $f(x)$ אזי ההתכנסות במ"ש $\iff \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|=0$

דוגמא: האם $f_n(x)=\begin{cases}n^2x; & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ n^2(\frac{2}{n}-x); & x\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]\\ 0; & x\in\left[\frac{2}{n},1\right]\end{cases}$ מתכנסות במ"ש?

פתרון: ברור שפונקצית הגבול היא $f(x)=0$. ההתכנסות אינה במש כי

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|>\sup_{x\in[0,1]}|f_n(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n})|=n\to\infty$$

תרגיל: האם סדרת הפונקציות $f_k(x)=\frac{kx}{1+x^2k^2}$ מתכנסת במ"ש ב $[0,1]$?
פתרון: נתחיל עם התכנסות :יהא x בקטע אזי $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{kx}{1+x^2k^2}=0$. האם ההתכנסות במ"ש?
נבדוק $\sup\limits_{x\in[0,1]}\frac{kx}{1+x^2k^2}$ ע"י גזירה שלה והשוואה ל-0

$$f_k'(x)=\frac{k(1+x^2k^2)-2xk^2\cdot kx}{(1+xk^2)}=0$$

ומכאן ש $k^3x^2=k$ ולכן $x=\frac{1}{k}$.
נבדוק אם מני' או מקס' $f_k(0)=0,f_k(1)=\frac{k}{1+k^2}<\frac{1}{2}=f(\frac{1}{k})$ ולכן זה מקס' שערכו $f_k(\frac{1}{k})=\frac{1}{2}$. כעת,

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_k(x)-f(x)|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\neq 0$$

ולכן ההתכנסות אינה במ"ש

תרגיל: האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{n}$ מתכנסת במ"ש ב $[-1,3]$?

פתרון: מבחן M נכשל פה כי $|\frac{(-1)^n x^2}{n}| \leq \frac{9}{n}$ שלא טור מתכנס אבל כיוון שזה טור מחליף סימן אנו יודעים לפי לייבינץ' כי הטור מתכנס לכל x בתחום.

כעת נסמן את פונקצית הגבול ב $S(x)$ ואז (כיוון שממשפט לייניץ' גם מתקיים כי $|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k| \leq |a_{n+1}|$)

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|S(x)-S_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|\frac{(-1)^{n+1}x^2}{n+1}| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{9}{n+1}=0$$

כלומר ההתכנסות במ"ש.

משפט: תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות <u>רציפות</u> המתכנסת בקטע $[a,b]$ המתכנסת במ"ש ל - $f(x)$. אזי גם $f(x)$ רציפה.

דוגמא : $f_n(x)=x^n$ בקטע $[0,1]$ אינה מתכנסת במ"ש ל $f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ כי $f(x)$ אינה רציפה

דוגמא: $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^k(x)}{k^2}$ רציפה ! כי $S_k(x)$ מתכנסת במ"ש אלה (וירשטרס)

הערה: $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ בקטע $[0,1]$ אינה מתכנסת במ"ש (למרות שפונקצית הגבול $f(x)=0$) רציפה.

משפט: (מבחן דריכלה)

אם בקטע I

1. $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)$ חסומה באופן אחיד $|S_n(x)|<M$ לכל n טבעי לכל $x\in I$
2. $\{b_n(x)\}$ סדרה מונוטונית ($b_n(x)\leq b_{n+1}(x)$ לכל n טבעי לכל $x\in I$ או להיפך) מתכנסת במ"ש ל-0

אז

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(x)b_k(x)$ מתכנס במ"ש

דוגמא: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{x+k}}$ מתכנס במ"ש בקטע $[1,100]$ כי:

1. $b_k(x)=\frac{1}{\sqrt{x+k}}$ מונוטונית מתכנסת במ"ש ל-0
2. $|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k| \leq 2$ לכל n ולכל x

דוגמא: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{\sqrt{x+k}}$ מתכנס בקטע $[1,100]$ כי:

1. $b_k(x)=\frac{1}{\sqrt{x+k}}$ מונוטונית מתכנסת במ"ש ל-0

2. נראה כי לכל x מתקיים כי $\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)$ חסומה לכל n : עבור $x=2\pi l$ הסכום הוא 0 עבור x אחר:

$$|\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)| = |Img(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx})| = |Img(\frac{e^{ix(n+1)}-1}{e^{ix}-1})| \leq |\frac{e^{ix(n+1)}-1}{e^{ix}-1}|$$

$$\leq \frac{2}{|e^{ix}-1|}$$

שימו לב כי $|e^{ix}-1|$ הינו קבוע שאינו תלוי ב n.

משפט: תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות רציפות המתכנסת בקטע $[a,b]$ המתכנסת ל- $f(x)$ רציפה.
אם $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ (או $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$) לכל $n\in\mathbb{N}$, $x\in[a,b]$ אז ההתכנסות במ"ש

דוגמא $f_n(x)=|x|^n$ בקטע $[-1/2,1/2]$מתכנסת במ"ש ל $f(x)=0$

מסקנה: תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות רציפות אי-שליליות שסס"ח שלהם מתכנסת בקטע $[a,b]$ ל $S(x)$ רציפה אזי ההתכנסות במ"ש

אינטגרציה איבר איבר

משפט: תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות רציפות אם הסס"ח$\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת בקטע $[a,b]$ במ"ש ל - $S(x)$. אזי

1. $S(x)$ אינטגראבילית בקטע $[a,b]$
2. מתקיים

$$\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(x)dx\right)$$

(כלומר $\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx$)

תרגיל: חשב את $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k}$

פתרון: נרצה להתסכל בטור $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ ולהציב $x=1/3$. מתקיים,

$$\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}dt$$

בנוסף הטור $\sum_{k=1}^{\infty}t^{k-1}=\frac{1}{1-t}$ מתכנס לכל $|t|<1$ ובנוסף מתכנס במ"ש בכל קטע $[-c,c]$ כאשר $0<c<1$ (לפי מבחן M)

לכן ניתן לבצע אינט' איבר איבר ולקבל

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x t^{k-1}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = S(x)$$

מכיוון ש

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln|1-t|\Big|_0^x = -\ln|1-x|$$

נקבל כי הפתרון לתרגיל

$$S(1/3) = -\ln(2/3) = \ln(3/2)$$

גזירה איבר איבר

משפט: תהא $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סידרה של פונקציות גזירות ברציפות. אם

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס בנקודה כלשהיא ב־ $[a,b]$
2. טור הנגזרות $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{'}(x)$ מתכנס במ"ש

אז

1. $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במ"ש ב־$[a,b]$
2. $S(x)$ גזירה ומתקיים

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{'}(x)$$

(כלומר $S^{'}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{'}(x)$)

תרגיל: מצא תחום התכנסות, רציפות של $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\arctan(\frac{x}{n^2})$ ומצא את הנגזרת שלה (אם קיימת)

פתרון: עבור $x > 0$ זהו טור חיובי. כיוון ש

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan(\frac{x}{n^2})}{x/n^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\arctan(y)}{y} = (\frac{0}{0}) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{1+y^2} = 1$$

(המעבר נכון בגלל שיש התכנסות בצד ימין של המשוואה), נוכל להשוואת אותו עם הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x}{n^2} = x\cdot\frac{\pi^2}{6}$ שמתכנס.

עבור $x<0$ זהו טור שלילי שניתן להשוואת שוב עם $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$
לכן תחום ההתכנסות הוא כל הממשיים.
רציפות: נתחיל עם $x_0>0$:
כיוון ש $1 = \lim_{y\to 0} \frac{1}{1+y^2} = (\frac{0}{0}) = \lim_{y\to 0}\frac{\arctan(y)}{y} = \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan(\frac{x_0}{n^2})}{x_0/n^2}$ עבור n מספיק גדול יתקיים כי $\arctan(\frac{x_0}{n^2}) < 2\frac{x_0}{n^2}$
כיוון ש $\arctan$ פונקציה עולה אזי נקבל כי לכל $0\le x\le x_0$ יתקיים $\arctan(\frac{x}{n^2}) \le \arctan(\frac{x}{n^2}) < 2\frac{x_0}{n^2}$
כיוון ש $\arctan$ פונקציה אי זוגית נקבל כי לכל $|x|\le x_0$ יתקיים $|\arctan(\frac{x}{n^2})| < 2\frac{x_0}{n^2}$
ולכן בזנב הטור מתקיים לכל $|x|\le x_0$

$$|\sum_{n=m}^{\infty}\arctan(\frac{x}{n^2})| \le \sum_{n=m}^{\infty}\frac{x_0}{n^2}$$

ולכן ההתכנסות במ"ש בקטע $[-x_0,x_0]$ לפי מבחן Mשל וירשטרס (תחילת הטור לא תשנה) .
כיוון שלכל n הפונקציה $\arctan(\frac{x}{n^2})$רציפה נקבל כי פונקצית הגבול בקטע $[-x_0,x_0]$רציפה.
כיוון שלכל x ממשי הוא נמצא באיזה שהוא קטע $[-x_0,x_0]$ אז הרציפות היא בכל הממשיים.
גזירות:
נרצה להשתמש בגזירה איבר איבר: לכל n מתקיים

$$[\arctan(\frac{x}{n^2})]' = \frac{1}{1+x^2/n^4}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2+x^2/n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

ולכן טור הנגזרות מתכנס במ"ש (שוב, לפי מבחן Mשל וירשטרס.)
לפי משפט גזירה איבר איבר מתקיים $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2/n^2}$