מבחן מועד ג בדידה קיץ תשפא־פתרון

כ"ח תשרי תשפ"ב, 4.10.2021

מרצים: עדי בן צבי, תמר בר־און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר־און, תמר בר־און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (20 נק') תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם $A\cup B\subseteq C$ אז $C\setminus A=C\setminus B$.

פתרון:

הפרכה: ניקח $A=\{1\},B=\{2\},C=\{1,2\}$, התנאי כמובן מתקיים, אך $C\setminus A=\{2\}\neq\{1\}=C\setminus B$.

(ב) אם $A\Delta B\subseteq C$ אז $C\setminus A=C\setminus B$.

פתרון:

הפרכה: ניקח $A=\{1\},B=\{2\},C=\{1,2\}$, התנאי כמובן מתקיים, אך $C\setminus A=\{2\}\neq\{1\}=C\setminus B$.

(ג) $A\cap B\neq\emptyset$ אם ורק אם $P(A)\cap P(B)\neq\emptyset$.

פתרון:

הפרכה: ניקח A,B זרות, למשל $A=\{1\},B=\{2\}$. צד ימין יהיה שקר, כי $A\cap B=\emptyset$. צד שמאל תמיד אמת, ולכן גם בדוגמה שלפנינו, כי $\emptyset\in P(A)\cap P(B)$, ולכן $P(A)\cap P(B)\neq\emptyset$.

(ד) $P(B)\setminus P(A)\subseteq P(B\setminus A)$.

פתרון:

הפרכה: ניקח $A=\{1\},B=\{1,2\}$, אז $\{1,2\}\in P(B)\wedge\{1,2\}\notin P(A)$, ולכן $\{1,2\}\in P(B)\setminus P(A)$, אך $\{1,2\}\nsubseteq B\setminus A$, ולכן $\{1,2\}\notin P(B\setminus A)$.

2. (21 נק') תהיינה פונקציות $f,g,h\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימות: $h=f\circ g$. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם הפונקציות f,g שתיהן אינן הפיכות אז h אינה הפיכה.

פתרון:

הפרכה: ניקח את הפונקציות הבאות:

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\geq 1\\ x+1 & x<-1\\ \pi & x\in[-1,1)\end{cases}$$

נשים לב שהן לא הפיכות כי: g איננה על (למשל ל-0 אין מקור), f לא חח"ע (למשל כי $f(-1)=f(0)=\pi$). אבל ההרכבה יוצאת הזהות שהיא כמובן הפיכה:

$$\forall x\geq 0: f\circ g(x)=f(x+1)=(x+1)-1=x$$

כי $x+1 \geq 1$, ולכן הולכים לפי השורה הראשונה של f. וכן:

$$\forall x<0: f \circ g(x) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$$

כי $x-1<-1$, ולכן הולכים לפי השורה השנייה של f.

(ב) אם h הפיכה אז f הפיכה.

פתרון:

אותה הפרכה בדיוק.

(ג) אם g הפיכה אז $Im(h)=Im(f)$.

פתרון:

הוכחה: $\subseteq$: יהי $y \in Im(h)$, כלומר: קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש־ $h(x)=y$. מכיוון ש־ $h = f \circ g$ נקבל $f(g(x))=y$ מה שאומר $y \in Im(f)$ (המקור שלו הוא $g(x)$).

$\supseteq$: יהי $y \in Im(f)$, כלומר קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש־ $f(x)=y$. מכיוון ש־ g הפיכה היא בפרט על, ולכן ישנו $z \in \mathbb{R}$ כך ש־ $g(z)=x$, ומכאן נקבל $y = f(x) = f(g(z)) = f \circ g(z) = h(z)$, מה שאומר $y \in Im(h)$ (המקור שלו הוא z).

3. (24 נק') נסמן ב־ D את קבוצת כל יחסי השקילות על $\mathbb{N}$. נגדיר יחס S על D באופן הבא: לכל $R_1, R_2 \in D$ מתקיים:

$$(R_1,R_2) \in S \iff \forall n \in \mathbb{N}: [n]_{R_1} \subseteq [n]_{R_2}$$

(במילים: הזוג (R_1,R_2) שייך ליחס S אם ורק אם לכל מספר טבעי מתקיים שמחלקת השקילות שלו לפי יחס השקילות R_1 מוכלת במחלקת השקילות שלו לפי יחס השקילות R_2).

(א) הוכיחו: S יחס סדר חלקי.

פתרון:

קפלקסיביות: יהי $R \in D$ אז נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{N}: [n]_R = [n]_R$$

ובפרט יש הכלה, ולכן $(R,R) \in S$.

טרנזיטיביות: ראשית נשים לב שמתקיים:

$$(\forall n \in \mathbb{N}: P(n)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}: Q(n)) \equiv \forall n \in \mathbb{N}: (P(n) \wedge Q(n))$$

כעת, נניח $(R_1,R_2),(R_2,R_3) \in S$. זאת אומרת: $\forall n \in \mathbb{N}: [n]_{R_1} \subseteq [n]_{R_2}$, וגם $\forall n \in \mathbb{N}: [n]_{R_2} \subseteq [n]_{R_3}$. ולכן נקבל $\forall n \in \mathbb{N}: ([n]_{R_1} \subseteq [n]_{R_2}) \wedge$

$([n]_{R_2} \subseteq [n]_{R_3})$ ומטרנזיטיביות ההכלה נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{N} : [n]_{R_1} \subseteq [n]_{R_3}$$

ולכן $(R_1, R_3) \in S$.

אנטי־סימטריות: נניח $(R_1, R_2), (R_2, R_1) \in S$. זאת אומרת: $\forall n \in \mathbb{N} :$ $[n]_{R_1} \subseteq [n]_{R_2}$, וגם $\forall n \in \mathbb{N} : [n]_{R_2} \subseteq [n]_{R_1}$. ולכן נקבל: $\forall n \in \mathbb{N} :$ $([n]_{R_1} \subseteq [n]_{R_2}) \wedge ([n]_{R_2} \subseteq [n]_{R_1})$ מה שאומר:

$$\forall n \in \mathbb{N} : [n]_{R_1} = [n]_{R_2}$$

ומכאן נקבל: $R_1 = R_2$. הוכחה:

$$(m, n) \in R_1 \iff m \in [n]_{R_1} \iff m \in [n]_{R_2} \iff (m, n) \in R_2$$

(ב) הוכיחו או הפריכו: S יחס סדר לינארי. (כלומר, האם לכל $R_1, R_2 \in D$ מתקיים: $(R_1, R_2) \in S \vee (R_2, R_1) \in S$?)

פתרון:

הפרכה: ניקח את יחסי השקילות הבאים:

$$R_1 = (\{1, 2\} \times \{1, 2\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}))$$

$$R_2 = (\{1, 3\} \times \{1, 3\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}))$$

נקבל שעבור $n = 1$ מתקיים: $[n]_{R_1} = \{1, 2\} \nsubseteq \{1, 3\} = [n]_{R_2}$,וכמו כן $[n]_{R_2} = \{1, 3\} \nsubseteq \{1, 2\} = [n]_{R_1}$ ולכן $(R_1, R_2) \notin S \wedge (R_2, R_1) \notin S$, ולכן היחס איננו לינארי.

(ג) האם קיים ב־ D איבר גדול ביותר (מקסימום)? הוכיחו את תשובתכם.

פתרון:

היחס $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ הוא יחס שקילות והוא האיבר הגדול ביותר. הוכחה: ראשית נשים לב שביחס הזה מתקיים: $\forall n \in \mathbb{N} : [n]_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \mathbb{N}$. כעת, יהי $R \in D$ אזי נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{N} : [n]_R \subseteq \mathbb{N} = [n]_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

ולכן $(R, \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \in S$.

(ד) האם קיים ב־ D איבר קטן ביותר (מינימום)? הוכיחו את תשובתכם.

פתרון:

היחס $I_{\mathbb{N}}$ (יחס הזהות) הוא יחס שקילות והוא האיבר הקטן ביותר. הוכחה: ראשית נשים לב שביחס הזה מתקיים: $\forall n \in \mathbb{N} : [n]_{I_{\mathbb{N}}} = \{n\}$. בנוסף, לכל יחס שקילות R מתקיים: $\forall n \in \mathbb{N} : n \in [n]_R$. כעת, יהי $R \in D$ אזי נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{N} : [n]_{I_{\mathbb{N}}} = \{n\} \subseteq [n]_R$$

ולכן $(I_{\mathbb{N}}, R) \in S$.

4. (20 נק') על קבוצת הפונקציות $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נגדיר יחס $\sim$ על ידי: לכל $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ מתקיים:

$$f \sim g \iff \exists k \in \mathbb{N} \forall n > k : f(n) = g(n)$$

(במילים: הזוג (f, g) שייך ליחס $\sim$ אם ורק אם ישנו k טבעי כך שהפונקציות זהות לכל $n > k$).

(א) הוכיחו: $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

פתרון:

רפלקסיבי: תהי $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, אזי עבור $k = 1$ מתקיים: $\forall n > k : f(n) = f(n)$, ולכן $f \sim f$.

סימטרי: נניח $g \sim f$ זאת אומרת: $\exists k \in \mathbb{N} \forall n > k : f(n) = g(n)$, ולכן $\exists k \in \mathbb{N} \forall n > k : g(n) = f(n)$, ולכן $g \sim f$.

טרנזיטיבי: נניח $f \sim g \wedge g \sim h$. זאת אומרת:

$$\exists k \in \mathbb{N} \forall n > k : f(n) = g(n)$$

וגם

$$\exists a \in \mathbb{N} \forall n > a : g(n) = h(n)$$

ניקח $m = \max\{a, k\}$, ונקבל:

$$\forall n > m : f(n) = g(n) \wedge g(n) = h(n)$$

ומכאן

$$\forall n > m : f(n) = h(n)$$

ולכן $f \sim h$.

(ב) מצאו פונקציה $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת: כל פונקציה $f \in [g]_{\sim}$ איננה על. הוכיחו את תשובתכם.

פתרון:

ניקח פונקציה קבועה: $\forall n \in \mathbb{N} : g(n) = 1$. כעת, תהי $f \in [g]_\sim$ אז מתקיים:

$$\exists k \in \mathbb{N} \forall n > k : f(n) = g(n) = 1$$

ולכן נקבל:

$$|Im(f)| \le k+1$$

הסבר: k הטבעיים הראשונים איננו יודעים לאן נשלחים, והם נותנים לנו לכל היותר k תמונות שונות, והחל מ־$k+1$ כולם נשלחים ל־1, ולכן לכל היותר $k+1$ תמונות שונות. קיבלנו שהתמונה של f סופית, ולכן $Im(f) \neq \mathbb{N}$ ולכן איננה על.

(ג) תהא $f \in [I]_\sim$ (כאשר I זוהי פונקציית הזהות), ונסמן $A = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = n\}$ (כלומר, A זו קבוצת נקודות השבת של f). הוכיחו: $|A| = \aleph_0$.

פתרון:

מהעובדה $f \in [I]_\sim$ נקבל: $\exists k \in \mathbb{N} \forall n > k : f(n) = n$. נסמן $B = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq n\}$, ונקבל $|B| \le k$, בנוסף $A = \mathbb{N} \setminus B$, ומכיון ש־ B סופית נקבל $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. הוכחה: ראשית מכיון ש־ $A \subseteq \mathbb{N}$ אז $|A| \le \aleph_0$. נב"ש $|A| < \aleph_0$ זאת אומרת שהיא סופית, כלומר ישנו $a \in \mathbb{N}$ כך ש־ $|A| = a$. ואז נקבל: $\mathbb{N} = A \cup B$ כאשר זהו איחוד זר, ולכן $|\mathbb{N}| = |A| + |B| \le a + k < \aleph_0$ בסתירה.

(ד) קבעו והוכיחו אם $[I]_\sim$ סופית, מעוצמה $\aleph_0$, מעוצמה א, מעוצמה $2^\aleph$ או אחרת (כאשר I זוהי פונקציית הזהות).

פתרון:

טענה: $[I]_\sim = \aleph_0$.

הוכחה: $\ge$: נגדיר $F : \mathbb{N} \to [I]_\sim$ ע"י

$$F(n) = \{(1, n), \dots, (n, n)\} \cup ((\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}))$$

בסימון אחר:

$$F(n)(k) = \begin{cases} n & k \le n \\ k & k > n \end{cases}$$

במילים: שולחים את n לפונקציה ששולחת את הטבעיים מ־ 1 עד n ל־ n, ואת השאר לעצמם. זוהי פונקציה חח"ע: אם $n < m$ אז $F(n)(1) = n < m = F(m)(1)$, ולכן $F(n) \neq F(m)$.

$\le$: נגדיר פונקציה $F : [I]_\sim \to \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{\{1, \dots, k\}}$ ע"י שנשלח כל פונקציה לפונקציה המצומצמת על המספרים מ־1 ועד הטבעי האחרון שאיננו נקודת

שבת:

$$F(f)=f\mid_{\{1,\ldots,m=\min_{k\in\mathbb{N}}\forall n>k:f(n)=n\}}=\left\{(1,f(1)),\ldots,\left(m=\min_{k\in\mathbb{N}}\forall n>k:f(n)=n,f(m)\right)\right\}$$

זוהי פונקציה חח"ע: נניח $f\neq g\in[I]_\sim$, אז אם

$$\min_{k\in\mathbb{N}}\forall n>k:f(n)=n\neq\min_{k\in\mathbb{N}}\forall n>k:g(n)=n$$

אז כמובן ש־ $F(f)\neq F(g)$ כי התחום יהיה שונה. אחרת, נסמן $m=\min_{k\in\mathbb{N}}\forall n>k:f(n)=n=\min_{k\in\mathbb{N}}\forall n>k:g(n)=n$. מהעובדה ש־ $f\neq g$ נובע שישנו $a\in\{1,\ldots,m\}$ כך ש־ $f(a)\neq g(a)$, ולכן $F(f)(a)=f(a)\neq g(a)=F(g)(a)$. בסה"כ קיבלנו

$$|[I]_\sim|\leq\left|\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^{\{1,\ldots,k\}}\right|\leq\aleph_0$$

כאשר אי השיוויון הימני נובע מכך שמדובר באיחוד בן מנייה של בנות מנייה.

5. (24 נק') הגדרה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ תקרא מבודדת אם: לכל $x\in A$ מתקיים: $x+1\notin A$.

(א) תהא D שרשרת ביחס ההכלה של קבוצות מבודדות. הוכיחו: האיחוד

$$U=\bigcup_{X\in D}X$$

היא קבוצה מבודדת.

פתרון:

יהי $x\in U$, ונניח בשלילה ש־ $x+1\in U$. מכיוון ש־ $x,x+1\in U$ נקבל שקיימות $X_1,X_2\in D$ כך ש־ $x\in X_1,x+1\in X_2$. מכיוון ש־ D שרשרת נקבל $X_1\subseteq X_2$ או $X_2\subseteq X_1$, ולכן $x,x+1\in X_2$ או $x,x+1\in X_1$. אבל X_1,X_2 מבודדות, בסתירה.

(ב) הוכיחו: קיימת קבוצה מבודדת S שהיא מקסימלית (כלומר, לכל קבוצה מבודדת A כך ש־ $A\subseteq S$ מתקיים $A=S$).

פתרון:

הקבוצה הריקה היא שרשרת בקבוצת המבודדות עם יחס ההכלה, ולפי האוסדורף מוכלת בשרשרת מקסימלית, נסמנה D. נתבונן בקבוצה

$$S=\bigcup_{X\in D}X$$

טענה: S מקסימלית. הוכחה: נניח ש־ A קבוצה מבודדת המקיימת $A\subseteq S$, ונניח בשלילה $A\neq S$. נגדיר $D'=D\cup\{A\}$ ונשים לב שהיא שרשרת של מבודדות, לפי חלוקה למקרים:

אם $X_1, X_2 \in D'$ אז: אם $X_1, X_2 \in D$ נקבל מכך ש־ D שרשרת ש־ $X_1 \subseteq X_2 \vee X_2 \subseteq X_1$.

אם $X_1 \in D, X_2 = A \vee X_1 = A, X_2 \in D$ אז מהעובדה ש־ $S \subseteq A$ ולכל $X \in D$ מתקיים $X \subseteq S$ נקבל $X_1 \subseteq X_2 \vee X_2 \subseteq X_1$. וכמובן כאשר $X_1 = X_2 = A$ גם נקבל הכלה.

בסה"כ קיבלנו $D \subsetneq D'$ בסתירה למקסימליות של D. לכן $S = A$.

(ג) האם קיימת קבוצה מבודדת S מקסימלית המקיימת: $S \cap \{1,2,4\} = \emptyset$? הוכיחו את תשובתכם.

פתרון:

קיימת: נשים לב שהקבוצה $\{0,3\}$ קבוצה מבודדת, ולכן הקבוצה $\{\{0,3\}\}$ שרשרת בקבוצת המבודדות עם יחס ההכלה, ולפי האוסדורף מוכלת בשרשרת מקסימלית D. נסמן

$$S = \bigcup_{X \in D} X$$

נקבל (הוכחה כמו בסעיפים קודמים) ש־ S קבוצה מבודדת מקסימלית, ומהגדרתה נקבל $\{0,3\} \subseteq S$. כעת: $0 \in S \Rightarrow 1 \notin S$ כי אם $1 \in S$ זו סתירה למבודדות של S. $3 \in S \Rightarrow 2 \notin S$ כי אם $2 \in S$ זו סתירה למבודדות שלה. לבסוף, $3 \in S \Rightarrow 4 \notin S$ כנ"ל. ולכן $S \cap \{1,2,4\} = \emptyset$.

(ד) תהא S קבוצה מבודדת מקסימלית. הוכיחו או הפריכו: $|S| = \aleph$.

פתרון:

הוכחה: $S \subseteq \mathbb{R}$, ולכן $|S| \leq \aleph$. את ההמשך נעשה בשתי דרכים:

דרך א: נב"ש $|S| < \aleph$. נגדיר פונקציות:$f, g : S \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x) = x+1, g(x) = x-1$$

מכיון שהן חח"ע נקבל $|Im(f)|, |Im(g)| = |S| < \aleph$. נסמן $A = Im(f) \cup Im(g)$, וכמובן נקבל $|A| < \aleph$.

טענה: $A \cup S = \mathbb{R}$ כאשר איחוד זה הוא זר.

הוכחת האיחוד: כמובן $S \cup A \subseteq \mathbb{R}$. נב"ש קיים $x \in \mathbb{R} \setminus (S \cup A)$ אז $S' = S \cup \{x\}$ מבודדת כי מהעובדה ש־ $x \notin Im(f)$ נקבל $x - 1 \notin S$, ומהעובדה $x \notin Im(g)$ נקבל $x + 1 \notin S$. וזו סתירה למקסימליות של S.

הוכחת זר: אם $x \in S \cup A$ אז אם $x \in Im(f)$ נקבל $x - 1 \in S$ בסתירה למבודדות, ואם $x \in Im(g)$ אז $x + 1 \in S$ בסתירה למבודדות.

כעת נקבל $|\mathbb{R}| = |S| + |A| = \max\{|S|, |A|\} < \aleph$ (כי עוצמת שתיהן קטנה מ־ $\aleph$), בסתירה לכך ש־ $|\mathbb{R}| = \aleph$.

דרך ב: נגדיר פונקציה $f : S \to [0,1)$ ע"י $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (הפונקציה לוקחת מספר ושולחת אותו ל"מה שנמצא אחרי הנקודה"). נוכיח ש־ f על: נב"ש שקיים $x \in [0,1)$ שאין לו מקור. נשים לב שמתקיים: $f(x) = f(x+1) = f(x-1) =$ x, ומההנחה נקבל $x, x+1, x-1 \notin S$. לכן $S' = S \cup \{x\}$ קבוצה מבודדת המכילה ממש את S בסתירה למקסימליות S. לכן ל־x יש מקור. בסה"כ קיבלנו f על, מה שאומר $\aleph = |[0,1)| \geq |S|$. ולפי קש"ב $|S| = \aleph$.