הערות לתרגיל כיתה 10

פתרון לתרגיל בעמוד 1

G חבורה אבלית.

$$\mathrm{End}\left[G\right]:\left\{f:G\to G\right\}$$

קבוצת ההומומורפיזמים מG לG היא חוג, כאשר:

- פעולת הכפל ־ הרכבה
- פעולת החיבור ־ חיבור בין שתי פונקציות

יש לנו חבורה אבלית G וחוג R, ונשאר להגדיר פעולת כפל.
נניח ש:

$$\varphi:R\to\mathrm{End}\left[G\right]$$

$$r\cdot g=\underbrace{\varphi\left(r\right)}_{\text{function}}\left(g\right)$$

השאלה שנשאלת היא ־ האם זה באמת מודול? האם מקבלים את כל ארבעת התנאים?

.1

$$r\cdot\left(g_1+g_2\right)=\varphi\left(r\right)\left(g_1+g_2\right)=\varphi\left(r\right)\left(g_1\right)+\varphi\left(r\right)\left(g_2\right)=r\cdot g_1+r\cdot g_2$$

.2

$$\left(r+s\right)\cdot g=\varphi\left(r+s\right)\left(g\right)=\left(\varphi\left(r\right)+\varphi\left(s\right)\right)\left(g\right)=\varphi\left(r\right)\left(g\right)+\varphi\left(s\right)\left(g\right)=r\cdot g+s\cdot g$$

.3

$$r\cdot\left(s\cdot g\right)=\varphi\left(r\right)\left(s\cdot g\right)=\varphi\left(r\right)\left(\varphi\left(s\right)\left(g\right)\right)=\left(\varphi\left(r\right)\circ\varphi\left(s\right)\right)\left(g\right)=\varphi\left(r\cdot s\right)\left(g\right)=\left(rs\right)\left(g\right)$$

.4

$$\varphi:A\to B$$

$$\varphi\left(a_1a_2\right)=\varphi\left(a_1\right)\cdot\varphi\left(a_2\right)$$

הערה(עמוד 2)

V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ו$T:V\to V$ העתקה לינארית, אז אפשר להגדיר את V כמודול מעל $\mathbb{F}[x]$ ע"י הגדרת הכפל $f(x)\cdot v=f(T)(v)$.

לדוגמה $\mathbb{R}^2$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$:

$$T(x,y)=(x+y,2y)$$

אפשר להגדיר את $\mathbb{R}^2$ כמודול מעל $\mathbb{R}[x]$:

$$\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$f(x)\cdot v=f(T)(v)$$

לדוגמה

$$\left(x^2+1\right)\cdot(1,2)=(T\circ T+I)(1,2)$$

$$T\circ T(1,2)=T(3,4)=(7,8)$$

$$(7,8)+(1,2)=(8,10)$$

פתרון לתרגיל בעמוד 2

$$T:V\to V$$

ראינו והבנו שV מודול מעל $\mathbb{F}[x]$.

נניח שW תת מרחב של V כך ש$T(W)\subseteq W$.

צ"ל W תת מודול של V.

$$f(x)\in\mathbb{F}[x]$$

$$v\in W$$

$$f(x)\cdot v=f(T)(v)$$

צ"ל ש$f(T)(v)\in W$. אבל

$$T(v)=\sum_{i=0}^{n}a_iT^i(v)\in W$$

תרגיל בעמוד 3

$E=\{R$ ל $\{1,\dots n\}$ אוסף כל הפונקציות מ$\}$. צריך להראות:

1. E מודול מעל R
2. $E\cong R^n$

פתרון

א. חבורה חיבורית אבלית

ב. סגירות לכפל בסקלר.

1. E חבורה אבלית כאשר

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

2. נגדיר את הכפל בסקלר ע"י

$$r\cdot f=f_r$$

$$f_r(x)=r\cdot f(x)$$

דוגמה: $\mathbb{Z}$ חוג. $A=\{1,2,3\}$

$$f(1)=7\qquad f(2)=3\qquad f(3)=9$$

E - מודול מעל $\mathbb{Z}$

$$11\cdot f=f_{11}$$

$$f_{11}(1)=77\qquad f_{11}(2)=33\qquad f_{11}(3)=99$$

נשאר להראות ש:

א.

$$(r+s)a=ra+sa\qquad r,s\in R,a\in E$$

ב.

$$r(a+b)=ra+rb$$

ג.

$$(rs)\,a = r\,(sa)$$

ד.

$$1 \cdot a = a$$

ה. $R^n \cong E$ כמודולים.

הגדרה

M יקרא מודול פשוט אם אין לו תתי מודולים לא טריוויאלים.

הערה

כל חוג הוא מודול מעל עצמו. במקרה זה כל אידאל שמאלי הוא תת מודול - ולהפך. לכן החוג הוא פשוט אם"ם הוא מודול פשוט(כמודול מעל עצמו)

הגדרה

$$Ra = \{ra | r \in R\} \qquad a \in m$$

זה תת מודול של M. הוא נקרא התת מודול הציקלי הנוצר ע"י a.

טענה

M הוא מודול פשוט אם ורק אם לכל $0 \neq a \in M$, $Ra = M$.

הוכחה

$\Rightarrow$ נניח בשלילה שM לא פשוט.

M לא פשוט ולכן קיים $\{0\} \neq N < M$. בנוסף, לכל $0 \neq a \in M$. בנוסף לכל $0 \neq a \in M$, $Ra = M$. $N \neq \{0\}$ ולכן קיים $0 \neq a \in N$ כך ש$Ra \subseteq N \subsetneq M$ בסתירה לכך ש$Ra = M$.