בשיעור שעבר הגדרנו:

- 0־תבנית דיפרנציאלית מעל $\mathbb{R}^3$: שדה סקלרי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$
- 1־תבנית דיפרנציאלית מעל $\mathbb{R}^3$: $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}y$
- 2־תבנית דיפרנציאלית מעל $\mathbb{R}^3$: $P\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$
- 3־תבנית דיפרנציאלית מעל $\mathbb{R}^3$: $P\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

הסדר חשוב : $\begin{tikzcd} \mathrm{d}x \arrow[r] & \mathrm{d}y \arrow[r] & \mathrm{d}z \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$

## סימון

אוסף כל התבניות הדיפרנציאליות ממעלה/דרגה/סדר $k/degree$) ב־$\mathbb{R}^n$ יסומן ע"י $\Omega^k\mathbb{R}^k$.

## הגדרה

כפל וודג'(wedge) בין זוג תבניות דיפרנציאליות ממעלות $k$ ו־$m$ הוא תבנית דיפרנציאלית ממעלה $k+m$:

$$\wedge:\Omega^k\left(\mathbb{R}^3\right)\times\Omega^m\left(\mathbb{R}^3\right)\to\Omega^{k+n}\left(\mathbb{R}^3\right)$$

$$\omega\times\eta\mapsto\omega\wedge\eta$$

## תכונות

מכפלת וודג' מקיימת את האקסיומות הבאות:

- <u>אסוציאטיביות</u>: לכל $\alpha,\beta,\gamma$, $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$, ולכן אין צורך בסוגריים.
- <u>בילינאריות</u>:

$$(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta=\omega_1\wedge\eta+\omega_2\wedge\eta$$

$$(f\omega)\wedge\eta=f(\omega\wedge\eta)$$

זה נכון לכל התבניות הדיפרנציאליות $\omega_1,\omega_2,\omega,\eta$ ולכל שדה סקלרי $f$.

$$\omega\wedge(\eta_1+\eta_2)=\omega\wedge\eta_1+\omega\wedge\eta_2$$

$$\omega\wedge(f\eta)=f(\omega\wedge\eta)$$

ה"סקלרים" כאן הם לא מספרים "$c$" אלא פונקציות סקלריות "$f$".

- <u>אנטי־סימטריות</u>: אם $\begin{matrix}\deg\omega=k\\ \deg\eta=m\end{matrix}$ אזי $\omega\wedge\eta=(-1)^{km}\eta\wedge\omega$

## מסקנות

1. $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$
2. $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$
3. אם $\omega$ היא 1־תבנית אזי $\omega \wedge \omega = 0$

## הוכחה

1. $\deg(\mathrm{d}y) = \deg(\mathrm{d}x) = 1$, ולכן $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = (-1)^{1\cdot 1}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$.
2. דומה ל(1): עושים שני חילופים.
3. אם $\deg\omega = 1$ אזי

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$$

$$2\omega \wedge \omega = 0$$

$$\boxed{\omega \wedge \omega = 0}$$

## תרגיל

נתון $\begin{cases} \omega = xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \eta = \mathrm{d}x + \mathrm{d}z \end{cases}$. חשב את $\omega \wedge \eta$

## פתרון

$$\omega \wedge \eta = \left(xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) =$$

$$= (xy\,\mathrm{d}y \wedge\ \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}x + \underbrace{\cancel{xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z}}_{=0} + \underbrace{\cancel{x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x}}_{=0} + x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z =$$

$$= xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \boxed{\left(xy + x^2\right)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}$$

## תרגיל

נתון $\begin{cases} \omega = x^2\,\mathrm{d}z \\ \eta = \sin x\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z \end{cases}$. חשב $\omega \wedge \eta$.

**פתרון**

$$\omega \wedge \eta = \left(x^2\,\mathrm{d}z\right) \wedge \left(\sin x\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z\right) =$$

$$= \left(x^2\,\mathrm{d}z\right) \wedge \left(\sin x\,\mathrm{d}x\right) + \left(x^2\,\mathrm{d}z\right) \wedge \left(xy\,\mathrm{d}y\right) + \xcancel{\left(x^2\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z} =$$

$$= x^2 \sin x\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y = \boxed{x^2 \sin x\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - x^3 y\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}$$

## הגדרה

אוסף כל ה־$k$־תבניות הדיפרנציאליות נקרא "אלגברה חיצונית"

## הגדרה

נגזרת חיצונית היא מיפוי בין $k$־תבניות דיפרנציאליות ל־$(k+1)$־תבניות דיפרנציאליות:

$$\mathrm{d} : \Omega^k\left(\mathbb{R}^n\right) \to \Omega^{k+1}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

- עבור 0־תבנית(שדה סקלרי) $f$ ב־$\mathbb{R}^3$, $\mathrm{d}f$ מוגדר ע"י $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$.
  [ב־$\mathbb{R}^n$ עם קואורדינטות $(x_1, \dots x_n)$, $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$]
  בכל מקרה זוהי תהיה 1־תבנית.
- עבור $k$־תבנית מהצורה $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_k$ נגדיר

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_k$$

ההגדרה עבור $k$־תבנית כללית נובעת מלינאריות: $\mathrm{d}\left(\omega_1 + \omega_2\right) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$

## תרגיל

נתונה 1־תבנית $\omega = y^2 \cos x\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z$. חשב את $\mathrm{d}\omega$

**פתרון**

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\left(y^2 \cos x\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z\right) =$$

$$= \mathrm{d}\left(y^2 \cos x\right) \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}\left(xy\right) \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}\left(1\right) \wedge \mathrm{d}z =$$

$$= \left(-y^2 \sin x \, \mathrm{d}x + \cancel{2y \cos \mathrm{d}y} + \cancel{0 \mathrm{d}z}\right) \wedge \mathrm{d}y + \left(\cancel{y \mathrm{d}x} + x \, \mathrm{d}y + \cancel{0 \mathrm{d}z}\right) \wedge \mathrm{d}x + \cancel{(0 \, \mathrm{d}x + 0 \, \mathrm{d}y + 0 \, \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}z} =$$

$$= -y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = \boxed{\left(-y^2 \sin x - x\right) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}$$

## הגדרה

$k$־תבנית דיפרנציאלית $\omega$ נקראת <u>סגורה</u> אם $\mathrm{d}\omega = 0$.

**למשל:** 1 היא 0־תבנית דיפרנציאלית סגורה, כי $\mathrm{d}\left(1\right) = 0$

## הגדרה

$k$־תבנית דיפרנציאלית $\omega$ נקראת <u>מדוייקת</u> אם קיימת $k-1$ תבנית דיפרנציאלית $\eta$ כך ש$\omega = \mathrm{d}\eta$.

**למשל:** $\omega = \left(-y^2 \sin x - x\right) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ מדוייקת כי $\omega = \mathrm{d}\left(y^2 \cos x \, \mathrm{d}y + xy \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}z\right)$

## משפט

$\omega$ מדוייקת $\Leftarrow$ $\omega$ סגורה.

## תרגיל

חשב $\mathrm{d}\omega$ עבור $\omega = \left(-y^2 \sin x - x\right) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

### פתרון

$$\mathrm{d}\omega = \left(\left(-y^2 \cos x - 1\right) \, \mathrm{d}x - 2y \sin x \, \mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$