

# תרגיל בית 8 מבוא לתורת החבורות

## 88-211 סמסטר א' תשע"ז

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ד טבת ה'תשע"ז, 22.1.2017.

### שאלות חימום

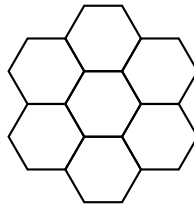
שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שידועים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

**שאלה 1.** הכלילו תרגיל שעשינו בכיתה: תהי  $G$  חבורת- $p$  סופית הפועלת על קבוצה  $X$  מסדר זר ל- $p$ . הוכיחו שקיימת ב- $X$  נקודת שבת.

### שאלות להגשה

**שאלה 2.** העזרו בלמה של ברנסייד כדי לענות על השאלות הבאות:

א. מכינים תחתיות לשתייה חמה בצורה



כל משבצת בלוח צבועה באחד משלושה צבעים, ולכן אם הופכים את התחתית מקבלים תחתית ששקולה אליה.

כמה תחתיות שונות אפשר ליצור (כלומר עד כדי סימטריות במרחב של משושה)?

ב. נניח והתחתיות לשתייה חמה הן לוח ריבועי בגודל  $2n \times 2n$  וכל משבצת צבועה באחד מ- $c$  צבעים. כמה תחתיות שונות אפשר ליצור כאשר רק הצד העליון של התחתיות צבוע (כלומר בלי שיקופים)?

רמז: אם מסתבכים, כדאי לנסות קודם עבור מספרים קטנים כדי להבין את הרעיון.

**שאלה 3.** יהי  $p$  ראשוני. מיינו את החבורות מסדר  $p^2$  לפי ההדרכה הבאה:

א. הוכיחו שחבורה מסדר  $p^2$  חייבת להיות אבלית.

ב. הוכיחו שהחבורות האבליות היחידות מסדר  $p^2$  הן  $\mathbb{Z}_{p^2}$  ו- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ , עד כדי איזומורפיזם.

**שאלה 4.** תהי  $G$  חבורת- $p$  סופית ותהי  $N \triangleleft G$  לא טריוויאלית. הוכיחו כי החיתוך  $Z(G) \cap N$  לא טריוויאלי. רמז:  $G$  פועלת על  $N$  על ידי הצמדה.

**שאלה 5.** חשבו את הסדר של כל מחלקות הצמידות של החבורות הבאות:

א.  $S_5$

ב.  $D_5$  (רמז: אין צורך בחישוב ישיר לכל איבר)

**שאלה 6.** נאמר שפעולה של חבורה  $G$  על קבוצה  $X$ , כך ש- $|X| > 2$ , היא 2-טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים  $x_1 \neq x_2 \in X$  ו- $y_1 \neq y_2 \in X$  קיים  $g \in G$  כך ש- $g * x_1 = y_1$  וגם  $g * x_2 = y_2$ .

א. הוכיחו שאם  $G$  פועלת 2-טרנזיטיבית על  $X$  אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

ב. הוכיחו כי זה ש- $G$  פועלת 2-טרנזיטיבית שקול לכך ש- $G$  פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ , כאשר  $X \times X \setminus \Delta$  ו- $G$  פועלת על המכפלה רכיב-רכיב.

ג. יהי  $F$  שדה, ונניח  $|F| > 2$ . הוכיחו שהחבורה  $GL_2(F)$  פועלת טרנזיטיבית על  $F^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ , אבל לא פועלת 2-טרנזיטיבית.

ד. אם  $|F| = 2$ , הראו ש- $GL_2(F)$  כן פועלת 2-טרנזיטיבית.

**שאלה 7.** תהי  $\pi = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7)(8, 9, 10) \in S_{10}$ . חשבו את סדר המְרָגָז  $|C_{S_{10}}(\pi)|$ .

**שאלה 8** (קצת חזרה). תהי  $G$  חבורה. הפריכו לפחות שלוש מהטענות השגויות הבאות:

א. אם  $N, K \triangleleft G$  וגם  $N \cong K$ , אז  $G/N \cong G/K$ .

ב. אם  $N \triangleleft G$  וגם  $G/N \cong G$ , אז  $N = \{e_G\}$ .

ג. אם  $H \leq G$ , אז  $Z(H) \triangleleft G$ .

ד. אם  $H, K \leq G$ , אז גם  $HK \leq G$ .

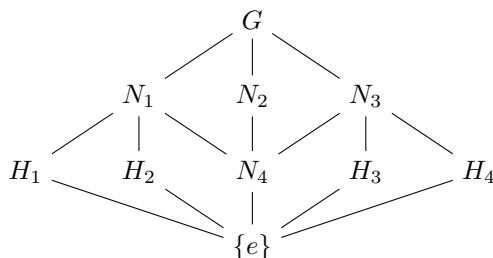
ה. אם  $N \triangleleft G$  לא טריוויאלית ומסדר אי זוגי, וגם  $G/N$  מסדר אי זוגי, אז  $G$  אבלית.

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

**שאלה 9.** רוצים להכין צמידים מ-17 חרוזים שבאים בשני צבעים. כמה צמידים שונים אפשר להכין כאשר שני צמידים הם שקולים אם הם סיבוב אחד של השני? רמז: הלמה של ברנסייד עם החבורה  $\mathbb{Z}_{17}$ . נסו גם להכליל זאת למספר שרירותי של חרוזים.

**שאלה 10.** תהי חבורה  $G$  עם סריג תת-החבורות הבא:



כאשר  $H_i \leq G$  ו- $N_i \triangleleft G$  הוכיחו כי  $G \cong D_4$ .

רמז: סמנו  $k = [G : N_1]$  והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה

בדרך תצטרכו להוכיח ש- $k$  ראשוני, ואז מוכרח להיות  $k = 2$ .

בהצלחה!