תרגיל: תהי G חבורה ונגידר את העתקה הבאה:

$$f : G \to G, f(g) = g^{-1}$$

האם f היא הומומורפיזם?
פתרון: נשים לב ש:

$$f(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$$

$$f(g)f(h) = g^{-1}h^{-1}$$

בשביל שf תהיה הומומורפיזם, צריך להתקיים לכל g, h:

$$gh/h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1}/hg$$

$$hg = gh$$

ולכן f הומומורפיזם אמ"ם G חבורה אבלית.
כאשר G חבורה אבלית, זה למעשה אוטומורפיזם (איזומורפיזם מחבורה לעצמה)
ההופכי: הוא בעצמו.

$$f(f(g)) = f(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$$

תרגיל: תהי G חבורה ציקלית, ו$f : G \to H$ אפימורפיזם. הוכיחו שH ציקלית.
פתרון:

$$G = \langle g \rangle$$

נוכיח ש

$$H = \langle f(g) \rangle$$

יהי $h \in H$. קיים $x \in G$ כך ש$f(x) = h$ (בגלל שf על).
G נוצרת ע"י g, לכן קיים איזשהו $m \in \mathbb{Z}$ כך ש$x = g^m$.

$$h = f(x) = f(g^m) = (f(g))^m$$

כלומר, קיבלנו שh שווה לחזקה כלשהי של $f(g)$. ולכן $H = \langle f(g) \rangle$.
תרגיל: תהי G חבורה כלשהי ו$f : G \to H$ אפימורפיזם, וH חבורה ציקלית לא טריוויאלית.
האם G ציקלית?
פתרון:

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$f(a,b)=a$$

הפרכנו.
תרגיל: האם קיים אפימורפיזם מD_4 ל$\mathbb{Z}_8$?
פתרון:

$$|D_4|=|\mathbb{Z}_8|=8$$

אם f היא פונקציה על בין שתי קבוצות סופיות מאותו גודל, אז היא גם חח"ע.
לכן אם

$$f:D_4\to\mathbb{Z}_8$$

היא אפימורפיזם, אז היא למעשה איזומורפיזם. אבל ידוע שD_4 ו$\mathbb{Z}_8$ לא איזומורפיות, למשל כי $\mathbb{Z}_8$ היא ציקלית וD_4 לא. עוד דרך: $\mathbb{Z}_8$ אבלית וD_4 לא.
(הערה כללית: בעיקרון חבורות איזומורפיות הן בעלות אותן תכונות של חבורות- אבליות/ציקליות/סדרים של איברים, כלומר יש בהן את אותו מספר איברים מכל סדר).
נוכיח למשל שבחבורות איזומורפיות יש אותו מספר איברים מכל סדר:
יהיו G וH חבורות איזומורפיות. יהי n מספר טבעי. נגדיר

$$G_n=\{g:o(g)=n\}$$

$$H_n=\{h:o(h)=n\}$$

תהי

$$f:G\to H$$

איזומורפיזם. נוכיח ש

$$f:G_n\to H_n$$

היא פונקציה חח"ע ועל.
ראשית צריך להוכיח ש$f[G_n]\subseteq H_n$.
כלומר, להוכיח שf שולח איבר מסדר לאיבר מסדר n.
יהי g מסדר n.

$$g^n=e$$

$$e=f(e)=f(g^n)=(f(g))^n$$

קיבלנו ש

$$o(f(g))|n$$

אבל f היא איזומורפיזם, אז יש לה הופכי שהוא הומומורפיזם בעצמו. לכן

$$o(g) = o(f^{-1}(f(g)))|o(f(g))$$

לכן $o(g) = o(f(g))$.
שלב שני: צריך להוכיח ש$H_n = f[G_n]$.
יהי $h \in H_n$. בגלל שf על יש לו מקור g (יחיד. כי f גם חח"ע). המטרה היא להראות ש$g \in G_n$. אנחנו רוצים להראות שלמקור של h יש את אותו סדר כמו לh. למעשה, המקור של h שווה ל$f^{-1}(h)$, ואז ההוכחה זה למקודם.
ובנוסף, בגלל שf איזומורפיזם הוא חח"ע, וצמצום של חח"ע הוא חח"ע. לכן

$$f : G_n \to H_n$$

היא פונקציה חח"ע ועל.
תרגיל: האם יש מונומורפיזם

$$f : GL_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^{10} = \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$$

פתרון: אם יש מונומורפיזם

$$f : GL_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^{10} = \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$$

זה אומר ש

$$f : GL_2(\mathbb{Q}) \to f[GL_2(\mathbb{Q})]$$

הוא איזומורפיזם (כי זה הומומורפיזם חח"ע, וברגע שמצמצמים לתמונה הוא נהיה גם על)
הערה: צריך להוכיח שלכל הומומורפיזם

$$f : G \to H$$

$$Im(f) \leq H$$

נוכיח:
א. $e \in Im(f)$. זה נכון כי $f(e) = e$.
ב. נניח ש$h_1, h_2 \in Im(f)$. צריך להוכיח ש$h_1 h_2^{-1} \in Im(f)$.

$$h_1 = f(g_1)$$

$$h_2 = f(g_2)$$

$$f(g_1g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2^{-1}) = h_1f(g_2)^{-1} = h_1h_2^{-1}$$

בחזרה לתרגיל המקורי:
ראינו שאם יש מונומורפיזם

$$f : GL_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^{10}$$

אז

$$GL_2(\mathbb{Q}) \cong Im(f) \leq \mathbb{Q}^{10}$$

ידוע שכל תת חבורה של חבורה אבלית, היא חבורה אבלית.
אז קיבלנו ש$GL_2(\mathbb{Q})$ איזומורפי לחבורה אבלית, אבל אנחנו יודעים ש$GL_2(\mathbb{Q})$ אינו אבלי.
תרגיל: האם קיים איזומורפיזם

$$f : (\mathbb{Q}_+, \cdot) \to (\mathbb{Q}, +)$$

פתרון: החבורות לא איזומורפיות. הסבר: נסתכל על $3 \in (\mathbb{Q}_+, \cdot)$.

$$f(3) \in (\mathbb{Q}, +)$$

קיים איזשהו $x \in \mathbb{Q}$ כך ש

$$x + x = f(3)$$

לx יש מקור, כי f הוא איזומורפיזם, בפרט על. נקרא לו y.

$$f(y \cdot y) = f(y) + f(y) = x + x = f(3)$$

$$f(y^2) = f(3)$$

f איזומורפיזם ולכן היא חח"ע. כלומר,

$$y^2 = 3$$

וזה סתירה.

החבורה הסימטרית

הגדרה: S_n היא חבורות הפונקציות החח"ע ועל מ$\{1, ..., n\}$ ל$\{1, ..., n\}$. לכל איבר בקבוצה הזאת אנחנו קוראים "תמורה".

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

איך מכפילים שני איברים?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 7 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

צורת כתיבה שניה לתמורות היא ע"י מחזורים.

$$(x_1, x_2, ..., x_m)$$

מייצג את הפונקציה

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to ... \to x_m \to x_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1,2,4)(3,5,7)(6) = (1,2,4)(3,5,7)$$

$$(1,2)(3,7,6,5,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

איך מחשבים הופכי?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

ההופכי של מחזור זה להפוך את הסדר של המחזור.

$$(1,2,5,6,3,7,4,)^{-1} = (4,7,3,6,5,2,1)$$

$$[(1,2)(3,7,6,5,4)]^{-1} = (4,5,6,7,3)(2,1)$$

אבחנה: לכל $n \geq 3$, S_n לא אבלית. למשל:

$$(1,2)(1,3) = (1,3,2)$$

$$(1,3)(1,2) = (1,2,3)$$

הערה: מחזורים זרים מתחלפים.
סדר של איבר: סדר של מחזור שווה לאורך המחזור.

$$o(1,2,4,7)=4$$

סדר של מכפלה של מחזורים זרים שווה לlcm של הסדרים של המחזורים, שזה הסדרים של האורכים שלהם.

$$o(1,2,4)(3,5)(6,7)=6$$

תרגיל: מהם הסדרים האפשריים של איברים בS_4?
1- איבר היחידה
2- $(1,2)$, $(1,2)(3,4)$
3 - $(1,2,3)$
4- $(1,2,3,4)$
תרגיל: מהם הסדרים האפשריים בS_5?
1- איבר היחידה
2- $(1,2)$, $(1,2)(3,4)$
3 - $(1,2,3)$
4- $(1,2,3,4)$
5- $(1,2,3,4,5)$
6- $(1,2)(3,4,5)$
תרגיל: האם קיים איבר מסדר 45 בS_{15}?
תשובה:

$$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)(10,11,12,13,14)$$

תרגיל: האם קיים איבר מסדר 39 בS_{15}?
פתרון: יש 2 דרכים לבנות איבר מסדר 39.
או מחזור באורך 39- לא אפשרי.
או שני מחזורים זרים באורך 13 ו3 - לא אפשרי.
הגדרה: סימן של תמורה.
סימן של מחזור מאורך k הוא $(-1)^{k-1}$.

$$sign(a,b)=-1$$

$$sign(a,b,c)=1$$

סימן של מכפלה של מחזורים הוא מכפלת הסימנים.
טענה: פונקציית הסימן היא פונקציה כיפלית.
הגדרה: תמורה שהסימן שלה הוא 1 נקראת "תמורה זוגית"
הגדרה: $A_n=\{\sigma : sign(\sigma)=1\}$ חבורת התמורות הזוגיות.

$$sign(e)=sign((1)(2)\cdots(n))=1\cdots1=1$$

$$sign(a^{-1}) \cdot sign(a) = sign(e) = 1$$

ולכן אם $sign(a) = 1$ אז $sign(a^{-1}) = 1$ ואם $sign(a) = -1$ אז $sign(a^{-1}) = -1$.

הערה: בדיוק חצי מהתמורות יהיו זוגיות וחצי יהיו איזוגיות. לכן

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$$

תרגיל: כתבו במפורש את A_4:

$$e$$

$$(1,2,3)$$

$$(1,3,2)$$

$$(1,4,2)$$

$$(1,4,3)$$

$$(2,4,1)$$

$$(1,3,4)$$

$$(2,3,4)$$

$$(2,4,3)$$

$$(1,2)(3,4)$$

$$(1,3)(2,4)$$

$$(1,4),(2,3)$$

שאלה: כמה מחזורים מאורך k קיימים בS_n?

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (k-1)!$$

צריך לבחור k איברים ולסדר אותם במעגל.
הגדרה: חילוף הוא מחזור מאורך 2 .
טענה: כל מחזור ניתן לכתוב כמכפלה של חילופים.

$$(1,2,3,4,5,6,7) = (1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)$$

$$(a_1,...,a_n) = (a_1,a_2)(a_2,a_3)\cdots(a_{n-1},a_n)$$

קיבלנו שכל תמורה היא מכפלה של חילופים. $(2,3) = (1,2)(1,3)(1,2) = (2,3)$

$$(a,b) = (1,a)(1,b)(1,a)$$