כפל פולינומים

פולינום: $P(x)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$(דרגה $n-1$). איך נייצג?

ייצוג מקדמים

$(a_0, a_1, ...a_{n-1})$

ייצוג נקודות

דוגמה: $P(x)=4x-2$ - עובר דרך $(0,-2)$ ו $\left(\frac{1}{2},0\right)$

טענה

יהי P פולינום מדרגה $n-1$, אז כל n נקודות(שונות) מגדירות את P.

$$\{(x_i, P(x_i))\}_{i=0}^{n-1}$$

כפל פולינומים

קלט $P(x)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

$Q(x)=\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

פלט $PQ(x)=\sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i$

$$c_j = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + ... + a_j b_0$$

סיבוכיות

בבעיה עם ייצוג מקדמים, על ידי חישוב ישיר, לוקח $O\left(n^2\right)$

ומה קורה בייצוג לפי נקודות?

$$P(x):(0,-3),(1,12),(-1,-4)$$

$$Q(x):(0,-2),(1,2),(-1,-6)$$

ניתן להכפיל את הנקודות ב$O\left(1\right)$ לכל נקודה ו$O\left(n\right)$ לכל הפולינום:

$$PQ\left(x\right):\left(0,6\right),\left(1,24\right),\left(-1,24\right)$$

בעיה - אין לנו מספיק נקודות, שכן הדרגה של הפולינום גדלה. ניתן אמנם למצוא עוד נקודות, אבל זה מסובך כאשר יש לנו ייצוג נקודות.

חישוב נקודה ע"י מקדמים

$$P\left(x\right)=\left(a_{0},a_{1},...a_{n-1}\right)$$

$$P\left(x_{0}\right)=a_{0}+a_{1}x_{0}+a_{2}x_{0}^{2}+...$$

אפשר לחשב נקודה ב$O\left(n\right)$ אם במקום לחשב את x^{i} מחדש לכל איבר, שומרים את הערך הקודם ומבצעים $x^{i-1}x$. זה בעצם ייצוג הורנר:

$$\left(\left(\left(a_{n-1}x+a_{n-2}\right)x+a_{n-3}\right)x+...\right)+a_{0}$$

זמן לחישוב נקודה ע"י המקדמים: $O\left(n\right)$.

שילוב של שתי השיטות

נקבל בייצוג של מקדמים, נעביר לייצוג נקודות, נכפיל, ונחזיר לייצוג מקדמים.
החישוב של כל נקודה הוא $O\left(n\right)$, ויש לנו n נקודות בכל פולינום - כלומר ההמרה לוקחת $O\left(n^{2}\right)$.
כדי לייעל את התהליך, נרצה לא לחשב כל נקודה בנפרד. אנחנו יכולים לבחור איזה n נקודות שאנחנו רוצים, ולכן נרצה לבחור את הנקודות בצורה מתוחכמת, כך שהן יהיו תלויות אחת בשניה.

המרת הפולינום

קלט $P\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_{i}x^{i}$

פלט $P\left(x_{0}\right),...P\left(x_{n-1}\right)$ עבור $x_{0},...x_{n-1}$

נרצה לחלק איכשהו את הבעיה לשניים. נפריד את הפולינום למקדמים הזוגיים והאי זוגיים:

$$P\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n-1}a_{i}x^{i}=\sum_{i=0}^{n/2-1}a_{2i}x^{2i}+\sum_{i=0}^{n/2-1}a_{2i+1}x^{2i+1}=\sum_{i=0}^{n/2-1}a_{2i}\left(x^{2}\right)^{i}+x\sum_{i=0}^{n/2-1}a_{2i+1}\left(x^{2}\right)^{i}$$

נגדיר שני פולינומים חדשים:

$$PE\left(y\right)=\sum_{i=0}^{n/2-1}a_{2i}y^{i}$$

$$PO(y)=\sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i+1}y^i$$

$$P(x)=PE\left(x^2\right)+xPO\left(x^2\right)$$

בעיה - צריך לחשב את זה עבור n נקודות. נרצה להיפטר מחלק מהנקודות. נבדוק עבור $-x$:

$$P(-x)=PE\left(x^2\right)-xPO\left(x^2\right)$$

כלומר אם נחשב את $P(5)$, אז $P(-5)$ הוא (כמעט) חינם, שכן כבר יש לנו את $PE\left(5^2\right),PO\left(5^2\right)$. לכן נרצה לקחת נקודות $x_0,x_1,...x_{n/2-1},-x_0,-x_1,...-x_{n/2-1}$.

נסמן ב$T(n)$ את הזמן לחישוב פולינום מדרגה $n-1$ על n נקודות:

$$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+cn=\theta(n\log n)$$

אבל יש בעיה - לא בטוח שאפשר לבצע את הרקורסיה.

נתבונן בשלב הראשון של הרקורסיה: רוצים לחשב את PE,PO על $x_0^2,x_1^2,...x_{n/2-1}^2$.

רוצים שהם יהיו מהצורה $x_0^2,x_1^2,...x_{n/4-1}^2,-\left(x_0^2\right),-\left(x_1^2\right),...-\left(x_{n/4-1}^2\right)$. כלומר נרצה ש$x_{n/4}^2=-\left(x_0^2\right)$. נצטרך להשתמש במרוכבים, ולבחור:

$$x_0,...x_{n/4-1},ix_0,...ix_{n/4-1},-x_0,...-x_{n/4-1},-ix_0,...-ix_{n/4}-2$$

ואפשר להמשיך ככה עוד שלבים (בשלב הבא נכפיל את החצי השני ב$\sqrt{i}$ וכן הלאה).

$$PE\left(x^2\right)=\sum_{j=0}^{n/2-1} a_{2j}\left(x^2\right)^j$$

$$PE\left(x^2\right)=PEE\left(x^4\right)+x^2PEO\left(x^4\right)$$

את PEE נחשב על $x_0^4,x_1^4,...x_{n/4-1}^4$

$$PEE\left(x^4\right)=PEEE\left(x^8\right)+x^4PEEE\left(x^8\right)$$

את $PEEE$ נחשב על $x_0^8,...x_{n/8-1}^8$, ונרצה ש$x_{n/8-1}^4=-\left(x_0^4\right)$, וכן הלאה.

בשביל למצוא את כל הxים, נשתמש בשורש היחידה.

הגדרה

ω יקרא <u>שורש פרימיטיבי</u> הnי של 1 <u>אם</u>:

א) $\omega^n=1$

ב) $\forall 1 \le j \le n-1 \quad w^j \neq 1$

השורש הפריטמיבי ה2: -1
השורש הפרימיטיבי ה4: i
השורש הפרימיטיבי ה8: $\sqrt{i}$

טענה

אם ω הוא השורש הפרימיטיבי הnי של 1 אז ω^2 הוא השורש הפרימיטיבי ה$^{n}/_{2}$ של 1.

הוכחה

$\left(\omega^2\right)^{n/2} = w^2\omega^n = 1$ כי ω שורש פרימיטיבי הn של 1.

עבור $j < \frac{n}{2} \Leftarrow 2j < n$ נקבל $\left(\omega^2\right)^j = \omega^{2j} \neq 1$

לכן

נבחר לבעיה שלנו את הנקודות $\omega^0, \omega^1, ...\omega^{n-1}$ כאשר ω השורש הפרימיטיביהnי של 1 בתור הנק' ה$x_0, ...x_{n-1}$

טרנספורם פורייר המהיר Fast Fourier Transform(FFT)

כאשר $a_0, a_1, ...a_{n-1}$ הם מקדמי הפולינום, מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^{2\cdot 2} & \cdots & \omega^{(n-1)\cdot 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(\omega) \\ P\left(\omega^2\right) \\ \vdots \\ P\left(w^{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

למרות שאפשר לחשב את ω מתוך n, נעביר אותו בכל זאת לפונקציה. כמו כן נשים לב שיש לנו שתי סוגים של חלוקות - את המקדמים מחלקים כל פעם לזוגיים ואי זוגיים, ואת הנקודות לראשונות ואחרונות:

FFT$(n, a_0, a_1, ...a_{n-1}, \omega)$

 if n=1

  return a_0

 else

  PE$\leftarrow$FFT$\left(\frac{n}{2}, a_0, a_2, a_4, ...a_{n-2}, \omega^2\right)$

  PO$\leftarrow$FFT$\left(\frac{n}{2}, a_1, a_3, a_5, ...a_{n-1}, \omega^2\right)$

  for j=0 to $\frac{n}{2} - 1$

```
        P[j]=PE[j]+ω^j PO[j]
        P[n/2 + j]=PE[j]-ω^j PO[j]
    return P
```

זמן

$$T\left(n\right)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+cn=\theta\left(n\log n\right)$$

חזרה לייצוג מקדמים

לאחר שהמרנו לייצוג נקודות והכפלנו את הנקודות, נרצה להחזיר את הפולינום לייצוג מקדמים.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^{2} & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^{2} & \omega^{2\cdot2} & \cdots & \omega^{(n-1)\cdot2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{0}\\ a_{1}\\ a_{2}\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P\left(1\right)\\ P\left(\omega\right)\\ P\left(\omega^{2}\right)\\ \vdots\\ P\left(w^{n-1}\right)\end{pmatrix}$$

$$F\bar{a}=\bar{p}$$

נשים לב שF היא מטריצת וונדרמונדה, ולכן היא הפיכה, ולכן אפשר לקבל חזרה את וקטור המקדמים ע"י חישוב:

$$\bar{a}=F^{-1}Fa\bar{a}=F^{-1}\bar{p}$$

עדיין - צריך למצוא דרך מהירה לחשב את F^{-1}

טענה $F_{ij}^{-1}=\frac{1}{n}\left(\omega^{-ij}\right)$

הוכחה $\left(F\cdot F^{-1}\right)_{ij}=\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{ik}\frac{1}{n}w^{-kj}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k(i-j)}$

נבדוק מקרה $i=j$ $\left(FF^{-1}\right)_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1=1$

מקרה $i\neq j$ **נקבע** $c=i-j$.

$$\left(FF^{-1}\right)_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kc}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{c}\right)^{k}=\frac{1}{n}\left(\frac{1-\left(\omega^{c}\right)^{k}}{1-\omega^{c}}\right)=0$$

נקבל ש:

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \frac{1}{\omega} & \frac{1}{\omega^2} & \cdots & \frac{1}{\omega^{n-1}}\\ 1 & \frac{1}{\omega^2} & \frac{1}{\omega^{2\cdot 2}} & \cdots & \frac{1}{\omega^{(n-1)\cdot 2}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \frac{1}{\omega^{n-1}} & \frac{1}{\omega^{2(n-1)}} & \cdots & \frac{1}{\omega^{(n-1)(n-1)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(1)\\ P(\omega)\\ P\left(\omega^2\right)\\ \vdots\\ P\left(w^{n-1}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix}$$

נשים לב שזו בדיוק אותה מטריצה כמו F - פשוט מחלקים בn וכל ω הופך ל$\frac{1}{\omega}$(שהוא גם שורש פרימיטיבי). לכן מריצים $FFT\left(n, P[0], P[1], ...P[n-1], \frac{1}{\omega}\right)$ ומחלקים את התוצאה בn.