המשפט היסודי של האלגברה:

<u>משפט:</u>

תהי f מוגדרת ואינטגרבילית ב[a,b].

1. הפונקציה $A(x)=\int_a^x f(t)dt$ מוגדרת ורציפה ב[a,b] ובכל נקודה x_0 שבה $f(x_0)$ רציפה A גזירה ומתקיים $A'(x_0)=f(x_0)$.
2. נוסחת ניוטון לייבניץ: אם f רציפה ב[a,b] וF הפונקציה הקדומה של f ב[a,b] אזי $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.

<u>הוכחה:</u>

ראשית נניח כי $A(x)=\int_a^x f(t)dt$ כאשר f אינטגרבילית ב[a,b] ולכן $A(x)$ מוגדרת היטב.

1. f אינטגרבילית ולכן חסומה. קיים M כך ש: $|f(x)|<M$ לכל $x\in[a,b]$.
כעת $|A(x)-A(y)|=\left|\int_a^x f(t)dt-\int_a^y f(t)dt\right|=\left|\int_y^x f(t)dt\right|\le\left|\int_y^x Mdt\right|=M|x-y|\to_{x\to y}0$ ולכן A רציפה. כעת נוכיח שהיא גזירה.
מתקיים: $\frac{A(x_0+\Delta x)-A(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x_0+\Delta x}f(t)dt-\int_a^{x_0}f(t)dt\right)=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)dt$
f רציפה בx_0 לכן בהינתן $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. לכן, עבור $0<\Delta x<\delta$: $\Delta x(f(x_0)-\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x_0)-\varepsilon)dt\le\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)dt\le\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)dt\le\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x_0)+\varepsilon)dt=\Delta x(f(x_0)+\varepsilon)$.
בסה"כ מתקבל $f(x_0)-\varepsilon\le\frac{A(x_0+\Delta x)-A(x_0)}{\Delta x}\le f(x_0)+\varepsilon$ עבור כל $|\Delta x|<\delta$.
וז"א ש: $\lim_{\Delta x\to0}\frac{A(x_0+\Delta x)-A(x_0)}{\Delta x}=f(x_0)$ ועפ"י הגדרת הנגזרת נקבל $A'(x_0)=f(x_0)$. מ.ש.ל. א'.

2. מתוך הסעיף הקודם מתקבל כי $F(x)=A(x)+C$.
לכן: $F(b)-F(a)=A(b)+C-A(a)-C=A(b)-A(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt$ וידוע כי $\int_a^a f(t)dt=0$. מתקבל כי: $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$. מ.ש.ל ב'.