שיעורי בית 3

27 בנובמבר 2016

1. יהיו G_1, G_2 חבורות הוכח/הפרך:

   (א) אם $G_1 \times G_2$ ציקלית אז גם G_2 וגםG_1 ציקלית.
   פתרון: נכון. נניח (g_1, g_2)יוצר. אזי - טענה: g_i יוצר של G_i. נוכיח עבור g_1:
   יהא $a \in G_1$ אזי קיים n כך ש $(g_1^n, g_2^n) = (g_1, g_2)^n = (a, e)$ אזי $g_1^n = a$.

   (ב) אם G_1 וגם G_2ציקליות אז $G_1 \times G_2$ ציקלית.
   פתרון: לא נכון. $\mathbb{Z}_n$ ציקלית (1 יוצר) אבל ראינו כי $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ אינה ציקלית

2. תהא G חבורה סופית. יהיו $a, b \in G$. הוכח/הפרך

   (א) אם a, b מתחלפים אז $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$
   פתרון: לא נכון. ניקח $a = b = 2 \in \mathbb{Z}_4$ אזי $o(ab) = o(0) = 1$ אבל $o(a)o(b) = 2 \cdot 2$

   (ב) $\left\langle a \right\rangle = \left\langle a^3 \right\rangle$
   פתרון: לא נכון. ניקח $a = 1 \in \mathbb{Z}_3$ אזי $o(3a) = o(0) = 1$ אבל $o(1) = 3$

   (ג) אם $b = a^4$ אזי $\langle ab \rangle \subseteq \langle a \rangle$
   פתרון: נכון. יהא $x \in \langle ab \rangle = \left\langle a^4 \right\rangle$ אזי $x = \left(a^4\right)^n = a^{4n}$ עבור n שלם כלשהו. אזי בפרט x הוא חזקה של a ולכן שייך ל $\langle a \rangle$

   (ד) $\left\langle a \right\rangle = \left\langle a^{-1} \right\rangle$
   פתרון: נכון. נראה הכלה בכיוון אחד (הכיוון השני דומה). יהא $x \in \langle a \rangle$ אזי $x = a^n$ עבור n שלם כלשהוא. אזי $x = \left(a^{-1}\right)^{-n}$ ולכן הוא חזקה של a^{-1}ובפרט שייך לחבורה הנוצרת על ידו.

3. הוכח כי החבורות הבאות אינן ציקליות

   (א) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   פתרון: נניח כשהיא ציקלית אזי קיים $\langle (a, b) \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ כך ש $\langle (a, b) \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

אזי קיים n שלם כך ש $(1,0)=n(a,b)=(na,nb)$ ולכן $n=a=\pm 1$
מנימוק דומה $b=\pm 1$ ולכן לכל n שלם מתקיים

$$n(a,b)=(\pm n,\pm n)\neq(2,3)$$

(ב) $\mathbb{Q}$

פתרון: נניח שציקלית. אזי $\mathbb{Q}=\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle$ עבור a,b שלמים. יהא p ראשוני שאינו מחלק את b אזי $\frac{1}{p}\notin\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle$. הוכחה: אחרת קיים n כך ש $\frac{1}{p}=n\frac{a}{b}=\frac{na}{b}$ ולכן $b=nap$ ומכאן ש p מחלק את b. סתירה.

4. תהא G חבורה. $g\in G$. נניח כי $g^k=e$. הוכח כי

$$o(g)|k$$

כלומר הסדר של g מחלק את k.
הדרכה: בצע חילוק עם שארית של k ב $o(g)$
פתרון: נסמן $o(g)=a$ אזי לפי חילוק עם שארית קיימים q,r כך ש $k=qa+r$ ו $0\leq r<a$ אזי

$$e=g^k=g^{qa+r}=(a^a)^q\cdot g^r=e^q\cdot g^r=g^r$$

כיון ש a הוא הסדר של g ו $r<a$ נקבל כי $r=0$. לכן $k=qa$

5. תהא G חבורה חילופית. יהיו $a,b\in G$ בעלי סדרים זרים. כלומר, נסמן $o(a)=m$, $o(b)=n$ אזי $\gcd(n,m)=1$ (ל n,m אין מחלק משותף פרט ל־1). הוכח כי

$$o(ab)=m\cdot n$$

היעזר בתרגיל מספר 4
פתרון: מצד אחד $(ab)^{mn}=a^{mn}b^{mn}=(a^n)^m(b^m)^n=e^me^n=e$. כעת אם $(ab)^k=a^kb^k=e$. נעלה את שני האגפים בחזקת n ונקבל $e=\left(a^kb^k\right)^n=b^{km}=a^{kn}b^{km}$ לפי תרגיל 4 $n|km$כיוון ש n,mזרים נקבל כי $n|k$ באופן דומה נקבל כי $m|k$. שוב, כיוון שאלו מספר זרים נקבל כי $mn|k$ ובפרט $mn\leq k$

6. כמה כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$ (עם פעולת מדולו 6 או כפי שלמדנו עם פעולה $[a]+[b]=[a+b]$)?
פתרון: ברור כי $[1]$ יוצר. לפי 2ד גם $[5]=[-1]$ יוצר. בנוסף כל השאר אינם יוצרים כי $[0]=3*[4]=2*[3]=3*[2]$ ולכן הסדרים שלהם קטנים מ־6. כמובן ש $[0]$ אינו יוצר כי הסדר שלו הוא 1

7. תהא G חבורה ויהא $g \in G$ מסדר n. הוכיחו כי $o(g^k) = \frac{n}{\gcd(k,n)}$
פתרון: מצד אחד

$$\left(g^k\right)^{\frac{n}{\gcd(k,n)}} = (g^n)^{\frac{k}{\gcd(k,n)}} = e^{\frac{k}{\gcd(k,n)}} = e$$

ולכן $o(g^k) \leq \frac{n}{\gcd(k,n)}$.

מצד שני נניח

$$\left(g^k\right)^m = e$$

אזי $g^{km} = e$ ומכאן ש : $\exists t \, nt = km$ (כי $n|mk$) נחלק את שני האגפים ב $\gcd(k,n)$ ונקבל

$$\frac{n}{\gcd(k,n)}t = \frac{k}{\gcd(k,n)}m$$

מכיוון של $\frac{k}{\gcd(k,n)}, \frac{n}{\gcd(k,n)}$ זרים (אחרת זה סתירה להגדרת gcd) נקבל כי $\frac{n}{\gcd(k,n)}|m$ (כי $\frac{n}{\gcd(k,n)}$ מחלק את $\frac{k}{\gcd(k,n)}m$) בפרט נקבל כי

$$\frac{n}{\gcd(k,n)} \leq m$$