שיעורי בית 7

1. יהא n שלם ונסתכל על החבורה $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (עם הפעולה $[a]+[b]=[a+b]$. עם הסימון $[x]=x+n\mathbb{Z}$).

(א) הוכיחו כי גם הפעולה $[a]\cdot[b]=[ab]$ מוגדרת. כלומר, אם $[a]=[a']$ וגם $[b]=[b']$ אזי $[ab]=[a'b']$.
פתרון: אכן יהיו a,b,a',b' שלמים כך ש $[a]=[a']$ וגם $[b]=[b']$ אז $a-a'\in n\mathbb{Z}$ וגם $b-b'\in n\mathbb{Z}$ ואז קיימים k_1,k_2 שלמים כך ש $a-a'=nk_1,\ b-b'=nk_2$. ואז נוכל לחשב י

$$ab=(a'+nk_1)(b'+nk_2)=a'b'+n(b'k_1+ak_1)+n^2k_1k_2$$

או

$$ab-a'b'=n\left[(b'k_1+ak_1)+nk_1k_2\right]\in n\mathbb{Z}$$

ולכן $[ab]=[a'b']$ כנדרש.

(ב) יהא p ראשוני. הוכיחו כי הקבוצה $M=\{[1],[2],\ldots,[p-1]\}$ היא מונואיד ביחס לפעולה $[a]\cdot[b]=[ab]$ (האמת שזאת חבורה).
פתרון: סגירות: לכל $[a],[b]$ ששיכים ל G נרצה להוכיח כי $[ab]\in G$. כלומר להוכיח כי $[ab]\neq[0]$. נניח בשלילה כי $[ab]=[0]$ אזי

$$ab\in p\mathbb{Z}$$

כלומר קיים k טבעי המקיים $ab=pk$ או במילים אחרות $p|ab$ (במילים: p מחלק את ab). כיוון ש p ראשוני מתקיים כי $p|a$ או $p|b$ כלומר $a\in p\mathbb{Z}$ או $b\in p\mathbb{Z}$ כלומר $[a]=[0]$ או $[b]=[0]$. סתירה.

קיבוצויות: נובע מקיבוצויות של מספרים שלמים.

איבר יחידה: $[1]\in G$ איבר יחידה. הוכחה: לכל $[a]\in G$ מתקיים $[a][1]=[a]$. כיוון ש Gחילופית שהרי $[a][b]=[ab]=[ba]=[b][a]$ לא צריך לבדוק את הכיוון השני.

2. תהא G חבורה חילופית. נגדיר $D=\{(g,g)\ :\ g\in G\}\subseteq G\times G$. הוכיחו כי זהוי תת חבורה נומאלית של $G\times G$ והראו כי

$$G\times G/D\cong G$$

פתרון: טענה D היא תת חבורה. הוכחה $(e,e)\in D$ לפי הגדרה ולכן הנטרלי שייך ל D. אם $(g_1,g_1),(g_2,g_2)\in D$ אזי גם הכפל שלהם $(g_1g_2,g_1g_2)\in D$. אם $(g,g)\in D$ אזי גם ההפוכי שלו $\left(g^{-1},g^{-1}\right)\in D$. ולכן D תת חבורה.

טענה: היא גם נורמאלית. הוכחה: בחבורה חילופית, כל תת חבורה היא נורמלית.
כעת נגדיר

$$\phi : G \times G \to G$$

ע"י

$$(x, y) \to xy^{-1}$$

טענה זהו אפימורפיזים. הוכחה:

$$\phi\left((x,y)(z,w)\right) = \phi\left((xz,yw)\right) = xz\left(yw\right)^{-1} = xzw^{-1}y^{-1} = xy^{-1}zw^{-1} = \phi\left((x,y)\right)\phi\left((z,w)\right)$$

בנוסף לכל $g \in G$ ניקח את (g, e) כמקור. כעת נחשב את הגרעין

$$\ker\phi = \{(x,y) \in G \times G :\ \phi(x,y) = e\} = \left\{(x,y) \in G \times G :\ xy^{-1} = e\right\} = \{(x,y) \in G \times G :\ x = y\} = D$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

3. תהא G_1, G_2 שתי חבורות עם סדרים זרים (כלומר $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$). הוכיחו כי קיים הומו' אחד $\phi : G_1 \to G_2$[רמז: חישבו על התמונה $\phi(G_1)$]
פתרון: יהא $\phi : G_1 \to G_2$ הומו'. אזי התמונה $H = Im(\phi) \leq G_2$ היא תת חבורה של G_2 ולכן $\frac{|G_2|}{|H|} \in \mathbb{Z}$ לפי משפט לגרנז'. מצד שני לפי משפט האיזו' מתקיים כי

$$G_1/\ker\phi \cong H = Im(\phi)$$

אזי

$$\frac{|G_1|}{|\ker\phi|} = |H|$$

ואז

$$\frac{|G_1|}{|H|} = |\ker\phi| \in \mathbb{Z}$$

כלומר $|H|$ מחלק גם את $|G_1|$וגם את $|G_2|$. כיוון שאלו מספרים זרים נקבל כי $|H| = 1$ ולכן $H = \{e_{G_2}\}$. אם התמונה של ההמור' זה רק האיבר הנטרלי של G_2אזי מדובר בהומו' הטריאלי (ששולח כל איבר ב G_1 לנטרלי של G_2).

4. נגדיר $G = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל . הוכיחו כי

(א) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G$ [הדרכה: השתמשו בפונקציה $e^{2\pi xi}$]
פתרון: נגדיר את הפונקציה

$$\phi : \mathbb{R} \to G$$

ע"י

$$x \mapsto e^{2\pi xi}$$

נראה כי זהו אפימורפיזים: אכן

$$\phi(x_1+x_2)=e^{2\pi(x_1+x_2)i}=e^{2\pi x_1 i}e^{2\pi x_2 i}=\phi(x_1)\phi(x_2)$$

והיא על כי לכל $z\in G$ קיימת לו הצגה פולארית. כלומר $z=e^{2\pi xi}$ עבור $0\leq x<2\pi$ והוא יהיה מקור אפשרי אחד.
לפי משפט האיזו' נקבל כי

$$\mathbb{R}/_{\ker\phi}\cong G$$

נותר להראות כי $\ker\phi=\mathbb{Z}$. אכן

$$\ker\phi=\{x\in\mathbb{R}\,:\,\phi(x)=1\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,:\,e^{2\pi xi}=e^{2\pi 0i}\right\}=\mathbb{Z}$$

כי

$$e^{2\pi x_1 i}=e^{2\pi x_2 i}\iff x_1-x_2\in\mathbb{Z}$$

[זכרו: הפונקציה $e^{2\pi xi}$ מחזורית 2π]

(ב) נגדיר $H\leq G$ להיות כל שורשי היחידה מסדר כלשהו. כלומר

$$H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$$

כאשר $U_n=\{z\in G\,:\,z^n=1\}$ הם שורשי היחידה מסדר n.
בעזרת סעיף קודם, הראו כי H איזומורפית ל $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
פתרון: הפונקציה

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to G$$

המוגדרת ע"י

$$x+\mathbb{Z}\mapsto e^{2\pi xi}$$

היא איזומורפיזים לפי סעיף קודם ובפרט חח"ע. אם נצמצם אותה לקבוצה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אזי נקבל מונומורפיזים

$$\phi:\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to G$$

המוגדר ע"י

$$x+\mathbb{Z}\mapsto e^{2\pi xi}$$

כיוון ש

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\cong Img(\phi)\leq G$$

נותר לחשב את $Img(\phi)$:

$$Img(\phi)=\{\phi(x+\mathbb{Z})\,:\,x+\mathbb{Z}\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}=\{\phi(x+\mathbb{Z})\,:\,x\in\mathbb{Q}\}=\left\{e^{2\pi xi}\,:\,x\in\mathbb{Q}\right\}=\left\{e^{2\pi\frac{a}{b}i}\,:\,a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}\right\}$$

טענה: $H' = \left\{e^{2\pi \frac{a}{b} i} \,:\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\} = H$.

הוכחה: $(\subseteq)$ אם נעלה את $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in H'$ בחזקת b נקבל $\left(e^{2\pi \frac{a}{b} i}\right)^b = e^{2\pi a i} = 1$ ולכן $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in U_b \subset H$

$(\supseteq)$יהא $z \in H$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $z \in U_n$. נרשום $z = e^{2\pi x i}$ ההצגה הפולארית שלו אזי $e^{2\pi n x i} = z^n = 1$ כלומר $nx \in \mathbb{Z}$ מאותו נימוק מסעיף קודם. ומכאן ש $x \in \mathbb{Q}$ ולכן $z = e^{2\pi x i} \in H'$

5. יהא $n \in \mathbb{Z}$ נסמן $H = \langle (n,n,n,n) \rangle \leq \mathbb{Z}^4$. הוכיחו כי $\left[\mathbb{Z}^4/H\right] \cong \left[\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right]$

פתרון: נגדיר פונקציה $\phi : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ע"י

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1-x_2, x_1-x_3, x_1-x_4, [x_1])$$

כאשר $[x_1] = x_1 + n\mathbb{Z}$. נוכיח כי ϕ הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}
&\phi\left((x_1,x_2,x_3,x_4)+(y_1,y_2,y_3,y_4)\right)\\
=&\phi\left((x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4)\right)\\
=&\left((x_1+y_1)-(x_2+y_2),(x_1+y_1)-(x_3+y_3),(x_1+y_1)-(x_4+y_4),[x_1+y_1]\right)\\
=&\left((x_1-x_2)+(y_1-y_2),(x_1-x_3)+(y_1-y_3),(x_1-x_4)+(y_1-y_4),[x_1]+[y_1]\right)\\
=&(x_1-x_2,x_1-x_3,x_1-x_4,[x_1])+(y_1-y_2,y_1-y_3,y_1-y_4,[y_1])\\
=&\phi\left((x_1,x_2,x_3,x_4)\right)+\phi\left((y_1,y_2,y_3,y_4)\right)
\end{aligned}$$

בנוסף ϕ על כי לכל $(a,b,c,[x]) \in \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ מתקיים כי

$$\phi\left((x,x-a,x-b,x-c)\right) = \left(x-(x-a),x-(x-b),x-(x-c),[x]\right) = (a,b,c,[x])$$

ולכן $(x,x-a,x-b,x-c)$ הוא מקור ל $(a,b,c,[x])$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים כי $\mathbb{Z}^4/\ker\phi \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. נחשב את הגרעין

$$\begin{aligned}
\ker\phi &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, \phi\left((x_1,x_2,x_3,x_4)\right)=(0,0,0,0)\right\}\\
&=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, (x_1-x_2,x_1-x_3,x_1-x_4,[x_1])=(0,0,0,0)\right\}\\
&=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, [x_1=x_2=x_3=x_4]\wedge[x_1\in n\mathbb{Z}]\right\}\\
&=\left\{(x,x,x,x)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, x\in n\mathbb{Z}\right\}\\
&=\left\{(nk,nk,nk,nk)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}\\
&=\left\{k\,(n,n,n,n)\in\mathbb{Z}^4 \middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}=\langle(n,n,n,n)\rangle=H
\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathbb{Z}^4/H \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

כנדרש.