

תרגיל בית מספר 4

1. תהי $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$. מצאו פונקציה הרמונית צמודה ל- u .
2. נניח ש- $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה הרמונית וגם u^2 הרמונית. הוכיחו ש- u פונקציה קבועה. הדרכה: לגזור לפי כלל שרשרת.

3. נניח ש- $f = u + iv$ היא פונקציה שלמה. להוכיח או להפריך: הפונקציה uv הרמונית.

4. הוכיחו שמתקיים אי-השוויון

$$\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz \right| \leq 2$$

כאשר γ היא המסילה המתחילה מהנקודה $z_0 = -1 + i$ ומסתיימת בנקודה $z_1 = 1 + i$.

5. חשבו $\int_{\gamma} \sin z + \bar{z} dz$ כאשר γ היא המסילה המוגדרת ע"י

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it} : -\pi \leq t \leq 0 \\ 1 - 2t : 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

6. לכל $R > 0$ נגדיר את המסילה $\Gamma_R = \{z : |z| = R\}$, הוכיחו ש-

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{(z^2 + 2z - 5)dz}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)} = 0$$