

מתמטיקה בדידה (88195) – בחינת סיום (מועד א') פרופ' סטוארט מרגוליס, פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. אם פתרם את כל השאלות – נא לציין 4 שאלות
לבדיקה, אחרת תיבדקנה 4 הראשונות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות. ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".

בהצלחה!

1. נגדיר $p \bar{\wedge} q := \neg(p \wedge q)$.
א. הוכיחו: ניתן לממש כל טבלת אמת, בכל מספר משתנים, באמצעות שימוש בקשר $\bar{\wedge}$ בלבד.
ב. ממשו בעזרת $\bar{\wedge}$ בלבד את טבלת האמת של $p \rightarrow q$.
2. תהי $P(A)$ קבוצת החזקה של A .
א. הוכיחו: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.
ב. הוכיחו: $P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$, ושוויון אם ורק אם $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.
3. יהי R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי על קבוצה X . נגדיר יחס S על X על ידי:
 $(a, b) \in S \Leftrightarrow (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \quad (\forall a, b \in X)$
א. הוכיחו: S הוא יחס שקילות.
ב. הוכיחו: S הוא יחס השוויון ($a = b$) אם ורק אם R הוא יחס סדר חלקי.
ג. תהי $X = P(\mathbb{R})$, ויהי R היחס:
 $(A, B) \in R \Leftrightarrow |A \setminus B| < \aleph_0 \quad (\forall A, B \in P(\mathbb{R}))$
(אין צורך לבדוק ש- R רפלקסיבי וטרנזיטיבי.) עבור יחס השקילות S
שהוגדר לעיל, מצאו את עוצמתה של כל מחלקת שקילות. נמקו.
4. תהיינה $\beta \geq \aleph_0, \alpha \geq 2$ עוצמות.
א. הוכיחו: $(2^\alpha)^\beta \leq 2^{(\alpha^\beta)}$
ב. יהי $\beta = \aleph_0$. מצאו $\alpha \geq 2$ שעבורו מתקיים שוויון בסעיף א'. נמקו.
5. הוכיחו, בעזרת הלמה של צורן: בקבוצה סדורה חלקית, כל שרשרת מוכלת
בשרשרת מקסימלית.