טענה: אם $z = rcis(\theta)$ אז $\bar{z} = rcis(-\theta) = rcis(2\pi - \theta)$ (ראיתם בתרגול).
הגדרה: פולינום מרוכב הוא פונקציה מהצורה

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$$

כאשר כל המקדמים הם מספרים מרוכבים.
דוגמאות:

$$f(x) = ix^2 + (3 - i)$$

$$f(x) = (i + 1)x^3 + (i - 1)x^2 + i$$

הגדרה: פולינום ממשי הוא פלינום מרוכב שכל המקדמים שלו ממשיים.
לדוגמא:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 3$$

הגדרה: $z \in \mathbb{C}$ יקרא "שורש" של פולינום, אם כשמציבים אותו בפולינום מקבלים 0.
כלומר, הוא פתרון של המשוואה

$$f(x) = 0$$

למשל: i הוא שורש של הפולינום

$$f(x) = x^2 + 1$$

כמו שרואים מהדוגמא, לפולינום ממשי יכול להיות שורש מרוכב שאינו ממשי.
הערה: יכול להיות פולינום שיש לו גם שורשיים ממשיים וגם שורשים מרוכבים שאינם ממשיים.
לדוגמא:

$$f(x) = x^3 - 1$$

השורשים שלו הם כל המספרים המרוכבים z שמקיימים

$$z^3 = 1$$

כלומר, כל שורשי היחידה מסדר 3.

$$1, cis(\frac{2\pi}{3}), cis(\frac{4\pi}{3})$$

משפט: יהי

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$$

פולינום ממשי. אזי אם z הוא שורש של הפולינום אז גם $\bar{z}$ הוא שורש.
הוכחה: המשמעות שz הוא שורש של הפולינום, היא שאם נציב אותו בפולינום נקבל 0. כלומר:

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

אנחנו צריכים להוכיח ש$\bar{z}$ הוא שורש, כלומר, שאם נציב $\bar{z}$ בפולינום, נקבל 0. כלומר:

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + ... + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

ניקח את הנתון:

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

נפעיל צמוד על שני האגפים: כלומר,

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = \bar{0}$$

ניזכר שצמוד של סכום שווה לסכום הצמודים. וכן, $\bar{0} = 0$

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z} + \bar{a_0} = 0$$

ניזכר שצמוד של מכפלה זה מכפלת הצמודים.

$$\overline{a_n}\bar{z}^n + ...\bar{a_1}\bar{z} + \bar{a_0} = 0$$

מהנתון הפולינום ממשי, כלומר, המקדמים שלו ממשיים. ידוע שהצמוד של מספר ממשי שווה למספר.
לכן נקבל:

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + ... + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

מש"ל.
משפט היסודי של האלגברה: כל פולינום מרוכב מתפרק למכפלה מהצורה

$$\beta(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

הαות לא בהכרח שונות. כלומר, לפולנום מרוכב מדרגה n יש n שורשים (לא בהכרח שונים).

לדוגמא:

$$f(x) = x^2 + 1$$

מעל הממשיים אי אפשר לפרק אותו למכפלה של פולינום מהצורה $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, אבל מעל המרוכבים כן אפשר:

$$x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$$

דוגמא נוספת:

$$f(x) = x^3 - 1$$

מעל הממשיים אי אפשר לפרק אותו למכפלה של פולינומים מדרגה 1.
מעל המרוכבים אפשר:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x - cis(\frac{2\pi}{3}))(x - cis(\frac{4\pi}{3}))$$

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

טענה: מעל הממשיים כל פולינום מתפרק למכפלה של פולינומים ממשיים מדרגות 1 ו2 .
לדוגמא:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

הוכחה: יהי $f(x)$ פולינום ממשי מדרגה n. ראשית, נפרק אותו למכפלה של n גורמים מדרגה 1 מעל המרוכבים (את זה אפשר לעשות לפי המשפט היסודי של האלגברה)

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

המקדמים החופשיים בפירוק $\alpha_1, ..., \alpha_n$ הם שורשי הפולינום.
חלק ממשיים וחלק מרוכבים שאינם ממשיים.
אם α_i הוא ממשי, אז $(x-\alpha_i)$ הוא פולינום ממשי מדרגה 1.
אם α_i הוא מרוכב, אז אנחנו יודעים שאחד השורשים הוא הצמוד שלו. כלומר, יש j כך ש $\alpha_j =$ $\overline{\alpha_i}$.

$$(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha_i}) = (x^2 - (\alpha_i + \overline{\alpha_i})x + \alpha_i\overline{\alpha_i}) =$$

$$x^2 - 2Re(\alpha_i)x + |\alpha_i|^2$$

קיבלנו פולינום ממשי מדרגה 2.
דוגמא: פרקו את הפולינום $x^4 + 1$ לגורמים אי פריקים מעל הממשיים.

פתרון: ראשית, נמצא את השורשים שלו מעל המרוכבים.

$$z^4 = -1 = cis(\pi)$$

$$z_0 = cis(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1 = cis(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = cis(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_3 = cis(\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

נשים לב ש$z_3 = \bar{z_0}$ ו$z_2 = \bar{z_1}$

$$x^4 + 1 = (x - z_0)(x - z_3)(x - z_1)(x - z_2) =$$

$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

התכנסות של סדרות

הגדרה: סדרה של מספרים מרוכבים היא אוסף אינסופי של מספרים מרוכבים מסודרים לפי הסדר של הטבעיים (כלומר, יש את האיבר הראשון, האיבר השני, האיבר השלישי וכו')
לדוגמא:

$$i, 2i, 3i, 4i, ...$$

נסמן (z_n)
הגדרה: נאמר שהסדרה (z_n) מתכנסת לz אם
נשים לב שהנורמות הם מספרים ממשיים, כלומר, ''העברנו'' את הבעיה לשאלה של התכנסות של סדרות ממשיות.
לדוגמא: נוכיח:

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n}i \to 0$$

$$1 + 2i, \frac{1}{2} + i, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i, ...$$

הוכחה: סדרת הנורמות היא:

$$|\frac{1}{n}+\frac{2}{n}i-0|=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}}=\frac{\sqrt{5}}{n}\to 0$$

השאיפה האחרונה היא שאיפה של סדרה ממשית, שאותה אתם יודעים לחשב מאינפי.
משפט: $(z_n=a_n+b_ni)\to z=a+bi$ אמ"ם $a_n\to a$ ו $b_n\to b$.
בצורה שקולה: $z_n\to z$ אמ"ם $(Re(z_n)\to Re(z))\wedge(Im(z_n)\to Im(z))$
הוכחה:
כיוון אחד: נניח שאנחנו יודעים ש$a_n+b_ni\to a+bi$. ואנחנו רוצים להוכיח ש$a_n\to a$ ו$b_n\to b$.
מה המשמעות ש$a_n+b_ni\to a+bi$ מבחינת ההגדרה?
זה אומר שהנורמה של ההפרש שואפת ל0.

$$|(a_n+b_ni)-(a+bi)|\to 0$$

$$|(a_n-a)+(b_n-b)i|\to 0$$

$$|a_n-a|,|b_n-b|\leq\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}\to 0$$

$$0\leq|a_n-a|\leq\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}\to 0$$

ממשפט הסנדוויץ

$$|a_n-a|\to 0$$

וזה אומר ש

$$a_n\to a$$

באותו אופן בדיוק מוכיחים עבור

$$b_n\to b$$

כיוון שני: נניח ש$a_n\to a$ ו$b_n\to b$. ואנחנו רוצים להוכיח ש$a_n+b_ni\to a+bi$.
כלומר, נתון

$$|a_n-a|\to 0,\wedge|b_n-b|\to 0$$

ורוצים להוכיח

$$|(a_n+b_ni)-(a+bi)|\to 0$$

$$|(a_n+b_ni)-(a+bi)|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}$$

כלומר, אנחנו רוצים להוכיח ש

$$\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}\to 0$$

$$|a_n-a|+|b_n-b|\to 0+0=0$$

$$0\leq\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}\leq|a_n-a|+|b_n-b|\to 0$$

הסבר לאי שוויון הימני: מכיוון שמדובר בשני ביטויים אי-שליליים, בשביל להוכיח את אי השוויון אפשר להעלות אותו בריבוע. נקבל:

$$(a_n-a)^2+(b_n-b)^2\leq(a_n-a)^2+(b_n-b)^2+2|a_n-a||b_n-b|$$

ממשפט הסנדוויץ נקבל ש

$$\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}\to 0$$

לדוגמא:

$$(1+\frac{1}{n})+(2\frac{1}{n})i\to 1+i$$

תרגיל: נניח ש$z_n\to z$ אז $|z_n|\to|z|$
הוכחה: נתון

$$a_n+b_ni\to a+bi$$

זה אומר:

$$a_n\to a,b_n\to b$$

רוצים להוכיח:

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\to\sqrt{a^2+b^2}$$

זה נובע מכללים של אינפי:

$$a_n \to a$$

גורר ש

$$a_n^2 \to a^2$$

ואם $b_n \to b$ אז $b_n^2 \to b^2$
ידוע שסכום מתכנס לסכום, לכן

$$a_n^2 + b_n^2 \to a^2 + b^2$$

ולבסוף אנחנו יודעים שאפשר להוציא שורש:

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \to \sqrt{a^2 + b^2}$$

תרגיל: אם $z_n \to z$, אז $\bar{z_n} \to \bar{z}$
הוכחה: $z_n = a_n + b_n i$ ו$z = a + bi$
נתון:

$$a_n + b_n i \to a + bi$$

זה גורר:

$$a_n \to a, b_n \to b$$

מאינפי אתם יודעים שאם $b_n \to b$ אז $-b_n \to -b$.
כלומר,

$$a_n \to a \wedge -b_n \to -b$$

זה אומר ש:

$$a_n - b_n i \to a - bi$$

וזה בדיוק:

$$\bar{z_n} \to \bar{z}$$